половина 2019 года). Произведен прогноза ИПП за период июнь 2019 – декабрь 2019 г. и рассчитана средняя ошибка прогнозируемых данных. Полученные результаты свидетельствуют о том, что будет наблюдаться рост ИПП, несмотря на экономическую ситуацию в РФ. Таким образом, рассчитанный прогноз ИПП представляет большой практический интерес, который позволит решать проблемы управления эффективностью производства в России.

Литература

1. Комолов С.А. Анализ современно состояния отраслей промышленности РФ // Бизнес в законе. 2013. № 4. 108 с.
2. Филиппова М.Г. Анализ современного состояния и развития промышленности России в период реализации федеральной кластерной политики // Молодой ученый. 2013. № 11. С. 495-500.
3. Коряков А.Г. Предприятия химического комплекса РФ в современных условиях: задачи выхода на траекторию устойчивого развития // Вестник МУ им. С.Ю. Витте. 2016. Вып. 3 (18). С. 3–9.
4. Коряков А.Г. Методологические вопросы устойчивого развития предприятий // Вопросы экономики и права. 2012. № 46. С. 110–114.
5. Коряков А.Г. Парадигма управления предприятием и обеспечение его развития на основе концепции устойчивого развития // Бизнес в законе. Экономико-юридический журнал. 2012. № 3. С. 179–182.
6. Коряков А.Г. Изменение парадигмы развития в условиях глобализации: актуализация концепции устойчивого развития // Мир науки, культуры, образования. 2012. № 3 (34). С. 364–367.
7. Промышленное производство: Федеральная служба государственной статистики [электронный ресурс]. URL: http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/enterprise/industrial/# (дата обращения: 20.06.2019).
8. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы // Учебник для вузов. М.: Высшая школа. 1988. 63 с.
9. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов // М.: Мир. 1982. 428 с.
10. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов // Учебник для вузов. СПб.: Питер. 2003. 608 с.
11. Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов. Практический подход // М. "Вильямс". 2004. 992 с.
12. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы // Москва. Ленанд. 2016. 528 с.
13. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа // Учеб. пособие для вузов. 3-е издание. 2001. С. 641-644.
14. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа // М.: Дрофа. 2004. Т. 2. 720 с.
15. Латыпова Н.В. Интегралы, зависящие от параметра // Ижевск: Изд-во Удмуртский университет. 2007. 57 с.
16. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика // М.: Высшая школа. 2003. 479 с.
17. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике // Издательство: Высшая школа. М.:2004. 407 с.

УДК 336.767.3:51

О ВЛИЯНИИ ЧАСТОТЫ КУПОННЫХ ПЛАТЕЖЕЙ НА ДОХОДНОСТЬ ИНВЕСТИЦИИ В ОБЛИГАЦИЮ

Попова Наталья Владимировна (nat_popova_@mail.ru)
ФГБОУ ВО «Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова»

Число купонных платежей в году – это второстепенный параметр облигации, влияние которого на инвестиционные свойства облигации в литературе практически не обсуждается. Данная статья посвящена влиянию этого параметра на доходность инвестиции в облигацию. Задача решается при фиксированных значениях основных параметров облигации. Установлено, что при любых значениях ставки реинвестирования доходность инвестиции в облигацию растет с увеличением числа купонных платежей в году.

Ключевые слова: математические методы, купонная облигация, число купонных платежей в году, доходность к погашению, ставка реинвестирования.

Купонная облигация – наиболее распространенный инструмент для инвестиций с фиксированным доходом. Как подчеркивается в [1, с. 420], «сегодня облигации относятся к одному из наиболее конкурентоспособных инвестиционных инструментов», что подтверждает и российский рынок облигаций, на котором в последние годы возобновлен выпуск облигаций федерального займа (ОФЗ).

Основными факторами, влияющими на инвестиционные свойства облигации, являются: срок до погашения, купонная ставка и доходность к погашению облигации [1, с. 467, 475], [2, с. 439-440, 484]. Такой параметр, как число купонных платежей в году, к основным не относится. По этой причине, очевидно, в теории влияние этого фактора практически не рассматривается. На практике этот параметр редко изменяется, купоны выплачиваются, как правило, один, два или четыре раза в году. Однако влияние этого фактора все же признается. Малкиел в своей работе [3, с. 204] отметил влияние частоты купонных выплат на значение «реального срока» облигации. Павельева Е.А. в работе [4] при обсуждении методов финансового инжиниринга, формулируя принципы конструирования параметров облигации, утверждает: «Для создания инвестиционно привлекательных облигаций следует, по нашему мнению, учесть фактор частоты выплаты купонного дохода» [4, с. 237]. Как уже отмечено, в теории практически отсутствуют сообщения о влиянии этого фактора на инвестиционные свойства облигации. В связи с этим теория инвестирования в финансовые инструменты с фиксированным доходом представляется неполной. Влиянию данного параметра посвящены предыдущие исследования автора данной статьи. В работах [5] и [6] рассмотрено влияние числа купонных платежей в году на цену и показатель дюрации облигации. Один из выводов в работе [6] – рост привлекательности инвестирования в облигации при увеличении числа купонных платежей в году в связи с уменьшением «среднего срока», т.е. дюрации облигации. В данной статье рассматривается влияние этого параметра на доходность инвестиции в облигацию. Задача решается в условиях определенности при фиксированных значениях основных параметров облигации. Основные требования условий определенности следующие: облигация является справедливо оцененной [7, с. 421], не имеет кредитного риска и не может быть отозвана эмитентом до установленной даты погашения [2, с. 477]. Известно, что математические методы - это основной инструментарий, используемый для изучения финансов и инвестиций. В данной статье используются методы дифференциального исчисления.

Рассмотрим влияние числа купонных платежей в году на доходность инвестиции в облигацию в следующей финансовой операции: 1) инвестор владеет облигацией до момента ее погашения; 2) все платежи по облигации реинвестируются. Данная финансовая операция используется в теории для обоснования свойств купонной облигации [1, с. 469], [2, с. 489]. Известно, что при покупке облигации без кредитного риска (типа ОФЗ) инвестор сталкивается с двумя видами риска – реинвестиционным и ценовым [1, с. 475]. Эти риски, вместе составляющие процентный риск, связаны с изменением рыночной процентной ставки после покупки облигации. Поскольку облигация не продается до погашения, то в этой финансовой операции отсутствует ценовой риск и присутствует реинвестиционный риск – риск того, что будущие ставки реинвестирования будут ниже доходности к погашению облигации в момент покупки. Заметим, что под доходностью к погашению понимают рыночную доходность облигации [2, с. 504].

Предположим, в момент $t=0$ при уровне рыночной доходности r по цене $P(r)$ куплена облигация номиналом A, купонные выплаты по которой выплачиваются m раз в году по годовой купонной ставке f. Срок до погашения облигации T лет, причем $T>1/m$ (иначе облигация не является купонной). Число купонных платежей, оставшихся до погашения облигации, $n=Tm$. Цена облигации в момент $t=0$ вычисляется по формуле:

$$P(r)=\sum_{k=1}^{n}\frac{q}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{k}}+\frac{A}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{Tm}},$$

где $q=(1/m)Af$ – сумма отдельного купонного платежа. Здесь r – годовая доходность к погашению облигации, определяемая по методу номинальной процентной ставки согласно рыночному соглашению [2, с. 486, с. 908]. Уравнение доходности финансовой операции имеет вид:

$$P(0)(1+r(m))^{T}=P(T), \tag{1}$$

где $r(m)$ – среднегодовая доходность финансовой операции (доходность инвестиции), рассматриваемая как функция параметра m (m может принимать значения 1,2,3,…). Ставку $r(m)$ называют доходностью, вычисленной по методу эффективной процентной ставки [2, с. 496]. На практике вычисляют также годовую номинальную доходность инвестиции $r^{(m)}$ [2, с. 908] из уравнения

$$P(0)\left(1+\frac{r^{(m)}}{m}\right)^{Tm}=P(T). \tag{2}$$

Фабоцци в работе [8, с. 62] показатель $r(m)$ называет более точным. Согласно [2, с. 496], если инвестор сравнивает годовую доходность с доходностями по другим облигациям, для которых доходность вычислена по методу годовой номинальной процентной ставки, то вычисляют показатель $r^{(m)}$. Однако если оценка облигации основана на реинвестировании доходов от облигации, то вычисляют показатель $r(m)$. Ставка $r(m)$, как эффективная, показывает, на сколько процентов увеличивается капитал за каждый год при выполнении финансовой операции. Согласно [9, с. 250], ставка $r(m)$ измеряет реальную эффективность инвестиции в облигацию для инвестора. Поэтому далее будем рассматривать показатель $r(m)$.

В уравнении (1) начальная стоимость инвестиции в облигацию $P(0)$ – это цена ее покупки $P(r)$. Конечная стоимость инвестиции $P(T)$ – сумма, вырученная в момент T в результате выполнения операции. В данном случае это сумма на банковском счете инвестора в момент T, полученная в результате реинвестирования платежей по облигации. Если i – ставка реинвестирования (годовая номинальная процентная ставка при начислении процентов на платежи m раз в году), то

$$P(T)=\sum_{k=1}^{n} q\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\left(T-\frac{k}{m}\right)}+A,$$

что можно записать в виде

$$P(T)=\left(1+\frac{i}{m}\right)^{Tm}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{q}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{k}}+\frac{A}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{Tm}}\right).$$

Тогда

$$P(T)=P(i)\left(1+\frac{i}{m}\right)^{Tm},$$

где $P(i)$ – оценка облигации на момент $t=0$ по ставке i:

$$P(i)=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{q}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{k}}+\frac{A}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{Tm}}\right).$$

Подставляя выражения $P(0)=P(r)$ и $P(T)$ в уравнение доходности (1), находим:

$$r(m)=\left(\frac{P(i)}{P(r)}\right)^{\frac{1}{T}}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}-1. \qquad (3)$$

Докажем следующую теорему.

Теорема. При фиксированных $T>1$, f и r последовательность значений доходности $\{r(m)\}$ является возрастающей и сходящейся.

1) Пусть $i=r$ – ставка реинвестирования совпадает с доходностью к погашению в момент покупки. Тогда из равенства (3) получим:

$$r(m)=\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}-1. \qquad (4)$$

Это известная формула для эффективной процентной ставки [9, с. 44]. По свойству эффективной процентной ставки, $r(m)\geq r$. Действительно, из равенства (4) по формуле Тейлора получим

$$r(m)\approx r+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)r^{2},$$

где m = 1,2,3,… .

Отсюда следует, что если m = 1 – платежи выплачиваются 1 раз в год, то $r(1)=r$ – доходность инвестиции в облигацию совпадает с доходностью к погашению в момент покупки. Значениям $m>1$ соответствуют значения доходности $r(m)>r$. Из теории числовых последовательностей известно, что последовательность $\left\{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}\right\}$ является возрастающей и сходящейся. Тогда из равенства (4) следует, что последовательность $\{r(m)\}$ является возрастающей и сходящейся, причем $\lim_{m\to\infty}\{r(m)\}=e^{r}-1$. Таким образом, в случае $i=r$ с увеличением числа купонных платежей в году m доходность инвестиции в облигацию $r(m)$ возрастает. При этом, если платежи по облигации выплачиваются чаще, чем один раз в год, т.е. $m>1$, то $r(m)>r$ – доходность инвестиции будет выше рыночной ставки в момент покупки облигации. Заметим, что в этом случае из уравнения (2) (при любом значении m) получим равенство $r^{(m)}=r$ – номинальная ставка доходности инвестиции совпадает с доходностью к погашению облигации в момент покупки. Это известный результат для рассматриваемой финансовой операции [2, с. 494].

2) Пусть теперь $i\neq r$, платежи реинвестируются под годовую номинальную процентную ставку i с начислением процентов m раз в году. Можно считать, что i – реальная ставка реинвестирования, доступная инвестору. В этом случае доходность инвестиции $r(m)$ можно назвать аналогично [1, с. 469] или [2, с. 494] полной доходностью. Заметим, что на практике величина $|\Delta r|$, где $\Delta r=i-r$, ограничена. По требованию Банка России [10] с середины ноября 2017 года максимально допустимое отклонение ставок по вкладам от рыночных составляет 2 процентных пункта. На рынке США, как следует из сообщений о ключевой ставке ФРС и ставках по депозитам США, $|\Delta r|$ примерно в тех же пределах. Таким образом, можно считать $|\Delta r|\leq 0,02$. Монотонность последовательности $\{r(m)\}$, члены которой имеют вид (3), можно установить путем вычисления производной $r(m)$ по параметру m (при дифференцировании переменную m считаем непрерывной):

$$r'(m) = \left(\frac{P(i)}{P(r)}\right)^{\frac{1}{T}} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m \left[\frac{1}{T}\left(\frac{P'(i)}{P(i)} - \frac{P'(r)}{P(r)}\right) + \ln\left(1 + \frac{i}{m}\right) - \frac{i/m}{1+i/m}\right]. \qquad (5)$$

Так как

$$P(r) = \frac{A}{\alpha(r)}\left(1 - \frac{f}{r}\right) + A\frac{f}{r}, \text{ где } \alpha(r) = (1 + r/m)^{Tm},$$

то

$$P'(r) = -\frac{A}{\alpha^2(r)}\alpha'(r)\left(1 - \frac{f}{r}\right), \; \frac{P'(r)}{P(r)} = \frac{\frac{\alpha'(r)}{\alpha(r)}\left(\frac{f}{r}-1\right)}{\frac{f}{r}(\alpha(r)-1)+1}.$$

Используя разложение функций $\alpha(r)$, $\frac{\alpha'(r)}{\alpha(r)}$, $\ln\left(1 + \frac{i}{m}\right) - \frac{i/m}{1+i/m}$ в степенные ряды, получим:

$$\frac{1}{T}\left(\frac{P'(i)}{P(i)} - \frac{P'(r)}{P(r)}\right) \approx \frac{1}{2m^2}\,\frac{(r-i)\left((1+fT)\left((r+i)-f\right)+\left(T-\frac{1}{m}\right)\frac{fT}{2}ri\right)}{\left(fT\left(1+\frac{i}{2}\left(T-\frac{1}{m}\right)\right)+1\right)\left(fT\left(1+\frac{r}{2}\left(T-\frac{1}{m}\right)\right)+1\right)} \qquad (6)$$

и выражение в квадратных скобках равенства (5) преобразуется к дроби с таким же знаменателем, что у дроби (6), и числителем, равным:

$$(1+fT)\left(\left(r-\frac{f}{2}\right)^2 + \frac{f}{4}(4i-f) + i^2fT + \frac{i^3fT}{2}\left(T-\frac{1}{m}\right)\right) + \frac{fT}{2}\left(T-\frac{1}{m}\right)\left(i^2rfT + \frac{i^3fTr}{2}\left(T-\frac{1}{m}\right) + r^2i\right).$$

Это выражение положительно при любых значениях i. Тогда из равенства (5) следует, что $r'(m) > 0$ при любых значениях i. Это означает, что последовательность значений доходности инвестиции в облигацию $\{r(m)\}$ является возрастающей при любых значениях ставки реинвестирования i. Чем чаще выплачиваются купоны, тем больше доходность инвестиции в облигацию при любой ставке реинвестирования. Заметим, что этот результат не зависит от купонной ставки. Предел последовательности равен:

$$\lim_{m\to\infty} r(m) = \left(\frac{\left(1-\frac{f}{i}\right)e^{-Ti}+\frac{f}{i}}{\left(1-\frac{f}{r}\right)e^{-Tr}+\frac{f}{r}}\right)^{\frac{1}{T}} e^i - 1. \qquad (7)$$

Теорема доказана.

Замечание. Отметим еще одно свойство доходности инвестиции в облигацию $r(m)$. Его можно сформулировать следующим образом: если $i < r$ – ставка реинвестирования ниже доходности к погашению облигации в момент покупки, то доходность инвестиции $r(m) > i$; если же $i > r$, то $r(m) < i$. Для доказательства этого утверждения получим формулу для оценки $r(m)$. Так как относительное (процентное) изменение цены облигации при изменении процентной ставки равно $\frac{\Delta P(r)}{P(r)} = \frac{P(i)-P(r)}{P(r)} = \frac{P(i)}{P(r)} - 1$, то в равенстве (3) отношение $\frac{P(i)}{P(r)} = 1 + \frac{\Delta P(r)}{P(r)}$. Так как величина $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$ по модулю меньше 1, т.е. $\left|\frac{\Delta P(r)}{P(r)}\right| < 1$, то $\left(1+\frac{\Delta P(r)}{P(r)}\right)^{\frac{1}{T}} \approx 1 + \frac{1}{T}\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$. Используя известную формулу оценки отношения $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$ с помощью показателя дюрации [7, с. 461], получим:

$$r(m) \approx \left(1 - \frac{1}{T}D\frac{\Delta r}{1+(r/m)}\right)\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1.$$

Здесь D - дюрация облигации. По свойству дюрации $\frac{D}{T} < 1$ (дюрация купонной облигации меньше срока до погашения). Используя разложения функций $\left(1+\frac{i}{m}\right)^m$ и $\frac{1}{1+(r/m)}$ в степенные ряды и учитывая члены разложения первого порядка, получим формулу для оценки доходности $r(m)$:

$$r(m) \approx i - \frac{D}{T}\Delta r. \qquad (8)$$

Отсюда, если $\Delta r > 0$, т.е. $i > r$, то $r(m) < i$; если же $\Delta r < 0$, т.е. $i < r$, то $r(m) > i$.

Заметим, что для случая $i < r$ неравенство то $r(m) > i$ можно получить иначе. Так как при снижении процентной ставки $\frac{P(i)}{P(r)} > 1$, то из равенства (3) получим:

$$r(m) = \left(\frac{P(i)}{P(r)}\right)^{\frac{1}{T}} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1 > \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1 \geq i$$

В случае, когда $i < r$ – ставка реинвестирования ниже доходности к погашению облигации в момент покупки, реализуется реинвестиционный риск. Вследствие возрастания значений то $r(m)$ с увеличением m возможна компенсация реинвестиционного риска, когда для некоторого значения m будет получено то $r(m) \geq i$ (что и показывают вычисления, табл.1).

В таблице 1 приводятся примеры вычисления по формуле (3) последовательностей $\{r(m)\}$ для различных соотношений между ставками f, r и i (срок до погашения T = 5 лет). Значения пределов вычислены по формуле (7).

Как видим, при любых соотношениях между ставками f, r и i последовательность $\{r(m)\}$ является возрастающей. При этом значения доходности $r(m) \geq i$, если $i < r$ и $r(m) < i$, если $i > r$, что соответствует замечанию к теореме.

В каждом случае, когда $i < r$, существует значение параметра m, при котором выполняется неравенство $r(m)) \geq r$ (компенсация реинвестиционного риска). Таким образом, вычисления подтверждают утверждения теоремы и замечания к теореме.

Заключение. В данной работе при фиксированных значениях основных параметров T, f и r установлено, что с увеличением числа купонных платежей в году m доходность инвестиции в облигацию $r(m)$ увеличивается при любой купонной ставке и любой ставке реинвестирования платежей от облигации. При этом возможна компенсация реинвестиционного риска.

Рост доходности инвестиции в облигацию с увеличением параметра m при прочих равных условиях может способствовать росту привлекательности инвестирования в облигации, что согласуется с выводом в работе [6] при изучении влияния данного параметра на показатель дюрации облигации.

Следует подчеркнуть, что доказательства получены при фиксированных значениях основных параметров облигации. Задача решалась в рамках теории финансовых инвестиций с фиксированным доходом в условиях определенности. Результаты работы могут быть полезны как эмитенту облигаций при конструировании параметров облигации, так и инвестору при принятии инвестиционных решений.

Таблица 1

Зависимость $r(m)$ от параметра m

	$f = 5\%$, $r = 6\%$ $(f < r)$			$f = 6\%$, $r = 6\%$ $(f = r)$			$f = 7\%$, $r = 6\%$ $(f > r)$		
	$r(m)$			$r(m)$			$r(m)$		
m / i	5 %	6 %	7%	5%	6%	7%	5%	6%	7%
1	0,05908	0,06000	0,06094	0,05894	0,06000	0,06108	0,05881	0,06000	0,06121
2	0,05982	0,06090	0,06200	0,05966	0,06090	0,06216	0,05952	0,06090	0,06231
3	0,06008	0,06121	0,06237	0,05991	0,06121	0,06254	0,05976	0,06121	0,06269
4	0,06021	0,06136	0,06255	0,06003	0,06136	0,06273	0,05988	0,06136	0,06289
5	0,06028	0,06146	0,06266	0,06011	0,06146	0,06284	0,05995	0,06146	0,06300
6	0,06034	0,06152	0,06274	0,06016	0,06152	0,06292	0,06000	0,06152	0,06308
7	0,06037	0,06157	0,06279	0,06020	0,06157	0,06297	0,06003	0,06157	0,06314
8	0,06040	0,06160	0,06283	0,06022	0,06160	0,06301	0,06006	0,06160	0,06318
9	0,06042	0,06163	0,06286	0,06024	0,06163	0,06304	0,06008	0,06163	0,06321
10	0,06044	0,06165	0,06289	0,06026	0,06165	0,06307	0,06010	0,06165	0,06324
15	0,06049	0,06171	0,06296	0,06031	0,06171	0,06315	0,06014	0,06171	0,06332
20	0,06052	0,06174	0,06300	0,06034	0,06174	0,06319	0,06017	0,06174	0,06336
$\lim_{m\to\infty} r(m)$	0.06060	0.06184	0.06311	0.06041	0.06184	0.06330	0.06024	0.06184	0.06348

Литература

1. Лоренс Дж. Гитман, Майкл Д. Джонк. Основы инвестирования / Пер. с англ. - М.: ДЕЛО, 1999. – 1008 с.
2. Фрэнк Дж. Фабоцци Управление инвестициями. - М.: ИНФРА-М, 2000. – 932 с.
3. Malkiel B. Expectations, Bond Prices, and the Term Structure of Interest Rates // Quarterly Journal of Economics. – 1962. – Vol. 76 (2). – pp. 197–218.
4. Павельева Е.А. Конструирование параметров ценных бумаг, обеспеченных активами, с использованием финансового инжиниринга // Вестник воронежского университета. – 2012. – № 2 (41). – С. 231–239.
5. Попова Н.В. Влияние частоты купонных платежей на цену облигации // Вестник финансового университета. – 2012. – № 3(69). – С. 40–44.
6. Попова Н. В. Влияние частоты купонных платежей на показатель дюрации облигации // Вестник финансового университета. – 2015. – № 4 (88). – С. 104–115.
7. Шарп У. Ф., Александер Г. Дж., Бэйли Дж. В. Инвестиции. – М.: Инфра-М, 1999. – 1028 с.
8. Фабоцци Ф.Д. Рынок облигаций. Анализ и стратегии. – М.: Альпина Паблишер, 2018. – 1195 с.
9. Четыркин Е. М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. – М.: Дело Лтд, 1995. – 320 с.
10. Информация Банка России от 15.11.2017 "О процентных ставках по банковским вкладам" [Электронный ресурс]. URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_282783/ (дата обращения: 14.07.2019).