

## О ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ В СТОХАСТИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ МОДЕЛЯХ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ СЛОЖНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Тальянов Сергей Юрьевич (stju82@mail.ru)

Шергин Владимир Владимирович

ФГБОУ ВПО «Ивановский государственный химико-технологический университет»

Для многоэтапных процессов приведены возможные математические формулировки задач повышения эффективности. Используются оценки эффективности, полученные стохастическими граничными методами.

**Ключевые слова:** стохастические граничные методы, оценки эффективности, повышение эффективности, многоэтапные процессы.

В течение последних трех-четырёх десятилетий достаточно интенсивно развивались так называемые граничные методы оценки эффективности экономической деятельности, в основу которых положено сравнение фактического результата работы фирмы, иной действующей единицы, с наилучшим возможным при данных условиях результатом. Одним из естественных направлений приложения результатов, полученных этими методами, является разработка подходов к построению количественных оценок возможности повышения эффективности. При переходе к изучению многоэтапных процессов и методов оценки их эффективности представляет интерес отыскание таких оценок и в этом случае. В данной работе освещены некоторые существенные, по мнению авторов, моменты при разработке подходов к решению указанной задачи.

В работах [1,2] были заложены основы непараметрического граничного подхода (DEA, Data Envelopment Analysis; в отечественной литературе применяется аббревиатура АСФ – анализ среды функционирования). Первоначально рассматривалась одноэтапная схема преобразования ресурса («входа»)  $X$  в продукт  $Y$  («выход»):  $X \rightarrow Y$ . «Наилучший возможный результат» может пониматься как «наименьшие затраты ресурса при данном выпуске» или как «наибольший выпуск при данных затратах», что приводит к т.н. «input-ориентированным» или «output-ориентированным» моделям. В методе DEA по совокупности значений  $\{X_i, Y_i\}$  где  $X_i$  – объем ресурсов, затраченных  $i$ -той фирмой на выпуск продукции в объеме  $Y_i$ ,  $i=1, \dots, n$  – общее число фирм, для каждого « $i$ » оптимальные значения  $Y_i^{opt}$  (или  $X_i^{opt}$ , в зависимости от типа модели) определяется как некоторая линейная комбинация значений  $Y$  (или  $X$ ), соответствующих другим фирмам. Отношение  $Y_i$  к  $Y_i^{opt}$  (соответственно  $X_i^{opt}$  к  $X_i$ ) принимается за оценку эффективности ( $e_i$ )  $i$ -той фирмы; при этом для части фирм будет  $e_i = 1$ , то есть они являются 100% эффективными.

Достаточно простой в вычислительном отношении, метод DEA не дает возможность анализировать природу отклонения от оптимума, в частности, никак не учитывает очевидную возможность влияния на результат деятельности

фирм случайных факторов. Аналитическая зависимость, например, в output-моделях, оптимума  $Y^{opt}$  от  $X$  выражена совокупностью линейных выражений и ее исследование затруднительно. Напротив, в стохастическом граничном подходе (SFA, Stochastic Frontier Approach, см. [3]) наличие случайных факторов и аналитическое представление «границы эффективности» закладывается непосредственно в модель. Метод SFA для output-моделей основан на представлении

$$Y_i = F(X_i) \cdot \exp(-u_i + v_i) \quad (1)$$

где функция  $F(\dots)$  задает оптимальный при данных условиях объем выпуска, то есть  $Y_i^{opt} = F(X_i)$ ,  $u_i > 0$  и  $v_i$  – случайные величины:  $v_i$  – «случайный шум»,  $u_i$  – фактор неэффективности. При том предполагается, что случайные величины  $u_i$  и  $v_i$  являются независимыми и – как правило – имеющими одинаковые по  $i$  законы распределения. В качестве показателя эффективности используется статистическая оценка величины  $\exp(-u_i)$ . Отметим, что в качестве  $F(X)$  часто разумно выбрать функцию, обладающую свойствами, сходными со свойствами производственных функций, например, положить  $Y = AX^\alpha$ ,  $A > 0$  и  $\alpha > 0$  – некоторые постоянные; при этом  $\alpha < 1$  в случае справедливости «закона убывающей эффективности». Представление (1) также записывают в виде  $y_i = f(x_i) - u_i + v_i$ , где  $x_i = \ln(X_i)$ ,  $y_i = \ln(Y_i)$  и тогда в случае  $Y = AX^\alpha$  получаем  $y_i = ax_i + b - u_i + v_i$ ,  $a = \alpha$ ,  $b = \ln A$ . «input-ориентированные» SFA-модели требуют некоторого дополнительного исследования, но для приведенного частного случая, фактически, одинаковы. Предположения: (а) о виде функции  $F$  (соответственно,  $f$ ) и (б) о законах распределения случайных величин  $u_i$ ,  $v_i$  являются основными при построении таких моделей и во многом предопределяют содержание и сложность процедуры оценки параметров модели метода SFA.

Оба подхода, DEA и SFA, нашли довольно широкое применение; достаточно интенсивно исследовался, в частности, вопрос об оценках эффективности в банковском секторе (см., например [4]); отметим также работы, посвященные оценкам эффективности в энергетике [5,6,7]

Структура (1) позволяет в случае стохастического подхода рассматривать отклонение текущего результата данной фирмы « $i$ » от оптимума как проявление некоторого свойства, присущего этой фирме или ее непосредственному окружению (что, заметим, достаточно строго соответствует исходным тезисам Х. Лейбенштайна [8], положенным в основу граничных методов). Тем самым становится логически понятной и постановка задачи повышения эффективности как формирования воздействия, имеющего целью модификацию этого свойства, при этом можно прогнозировать и будущую (более высокую) оценку эффективности данной фирмы (см., напр., [9,10]); подобный вывод в рамках непараметрического подхода сделать сложно. Вместе с тем при решении этой задачи в модели SFA возникает ряд новых вопросов. И прежде всего о том, в каком именно смысле следует рассматривать повышение эффективности. Хотя фактор неэффективности проявляется отдельно для каждой фирмы, его характеристики – в данном случае параметры закона распределения – не являются индивидуальными. Отчасти эта проблема решается введением в модель в той форме зависимости этих параметров от других показателей или иных особенностей отдельных фирм. Отметим сразу, что предполагать параметры закона распределения случайных величин  $u_i$  различными и не связанными друг с другом у всех фирм нельзя – как и в других статистических методах, общее число оцениваемых параметров модели должно быть (существенно) меньше числа наблюдений. Поэтому оправданно наличие разных методов «индивидуализации», каждый из которых может иметь преимущества в конкретном практическом приложении. Один из таких подходов состоит в том, что параметры закона распределения случайных величин  $u_i$  представляются в виде заданного вида функций, зависящих от *не вошедших* в (1) показателей, относящихся к отдельным фирмам. Несколько иная идея используется в т.н. «метафронтир»-подходе [7]. Здесь форма границы или изначально задается отдельно для группы фирм, или параметры функции, определяющие границу, оцениваются отдельно по этим выделенным группам, с обоснованием алгоритма выделения таких групп.

Естественно ожидавшимся – и реализованным следующим шагом в развитии граничных методов явилось изучение многоэтапных процессов

$$X \equiv Z^{(0)} \rightarrow Z^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow Z^{(k-1)} \rightarrow Z^{(k)} \equiv Y \quad (2)$$

и следует отметить, что основной, если не исключительный вклад в изучение этого вопроса сделан в рамках непараметрического подхода (см., напр., обзор [11]). Среди многих примеров приложения этой схемы отметим процессы производства, передачи и потребления тепло-

вой или электрической энергии. Заметим, что рассматривались и структурно более сложные схемы, чем (2).

Значительно расхождение в исходных предпосылках DEA и SFA и, как следствие, различие в возможностях приложения к детальному анализу эффективности, реально отмечаемая только качественная сопоставимость оценок, доставляемых этими методами, формируют определенный интерес к исследованию применения SFA в схеме (2). В работе [12] представлены некоторые результаты в этом направлении. Так, в частности, на основе результатов этой работы можно предложить следующую модель двухэтапного процесса  $X \rightarrow Z \rightarrow Y$ . Пусть  $x_i = \ln X_i$ ,  $z_i = \ln Z_i$ ,  $y_i = \ln Y_i$ , и для процессов  $X \rightarrow Z$  и  $Z \rightarrow Y$  имеют место соотношения:

$$z_i = ax_i + b - u_i + v_i \text{ и } y_i = cz_i + d - r_i + w_i \quad (3)$$

где  $v_i$ ,  $w_i$  – независимые нормальные случайные величины с нулевыми средними и некоторыми дисперсиями,

$u_i$ ,  $r_i$  – независимые *неотрицательные* случайные величины. Тогда в целом для двухэтапного процесса  $X \rightarrow Y$  можно записать

$$y_i = Ax_i + B - U_i + V_i \quad (4)$$

при этом случайные величины  $V_i$  будут нормальными, а закон распределения случайных величин  $U_i$  будет определяться законами распределений случайных величин  $u_i$ ,  $r_i$ . Здесь существенно то, что структуры описаний всех процессов практически идентичны, что является непосредственным следствием выбора в (3) линейных функций (заметим, что выбор для второго этапа квадратичной функции не согласуется с предположением о нормальном распределении для  $V_i$ ), и в [12] обсуждался вопрос о том, насколько данная относительно простая модель допускает обобщения.

Переходя к вопросу об управлении эффективностью в многоэтапных процессах, отметим прежде всего, что реализация «метафронтир»-подхода здесь существенно усложняется необходимостью согласовывать разбиения фирм на группы на всех этапах. Таким образом, представляется более перспективным для исследования случай, когда параметры законов распределений случайных факторов неэффективности выражены в виде функций от тех или иных внешних (по отношению к рассматриваемой конкретной модели) факторов, влияющих на результаты деятельности отдельных фирм. Обращаясь к модели (1), получаем, что здесь среднеожидаемое значение «выхода» фирмы

« $i$ » равно:  $MY_i = Y_i^{onm} M\{exp(-u_i)\}M\{exp(v_i)\}$ .  
Тогда для соотношений (3), (4) получаем

$$MY_i = Y_i^{onm} \cdot M\{exp(-cu_i - r_i)\} \cdot M\{exp(cv_i + w_i)\}.$$

Случайные величины  $v_i$ ,  $w_i$  по смыслу, «неуправляемы». Исключив временно для упрощения записи последний множитель и учитывая независимость случайных величин  $u_i$ ,  $r_i$ , получаем:

$$MY_i = Y_i^{onm} \cdot M\{exp(-cu_i)\} \cdot M\{exp(-r_i)\} = Y_i^{onm} \cdot e_{i1} \cdot e_{i2}.$$

Очевидно, не вызовет принципиальных затруднений обобщение соотношений (3), (4) применительно к общей схеме (2). Поскольку для многоэтапных процессов задача повышения эффективности просто не рассматривалась, в качестве одного из возможных подходов к ее решению считаем логичным обобщение основных идей работ [9,10] на этот «многомерный» случай. Мы остановимся на этом вопросе более подробно, принимая, что факторы эффективности  $u_i$ ,  $r_i$  имеют показательный закон распределения; в работе [12] приведены некоторые соображения к обоснованию этого выбора; отметим, в частности, что при этом оказывается возможным получить относительно простые аналитические выражения для оценок эффективности и других связанных с ними величин (в случае одноэтапных процессов более часто предполагается, что случайные величины  $u_i$  имеют усеченное нормальное распределение). Предположим, что параметры  $\mu_i$  показа-

тельных распределений величин  $u_i$  зависят известным образом от значений некоторого внешнего по отношению к (3) фактора  $h$ , значения  $h_i$  которого для каждой фирмы известны и могут быть изменены на величину  $\Delta h_i$  за счет определенных затрат. Подобно работе [9], мы можем рассмотреть ограничения вида  $c_1(\Delta h_i) \leq C$ . По предположению, можно выразить изменения  $\Delta \mu_i$  и далее  $\Delta(e_{i1})$  через  $\Delta h_i$  (пусть  $\Delta(e_{i1}) = \varphi_1(\Delta h_i)$ ) и далее найти наилучшее  $\Delta h_i$  в пределах ограничений. Точно так же, выделяя некоторый фактор  $p$ , влияющий на параметр  $\lambda$  показательных законов распределения случайных величин  $r_i$ , выразим  $\Delta(e_{i2})$  как  $\varphi_2(\Delta p_i)$ . В целом логично теперь поиск оптимальных  $\Delta h_i$  и  $\Delta p_i$ , то есть доставляющих максимум выражению

$$\Delta(e_{i1} \cdot e_{i2}) \approx \Delta(e_{i1}) \cdot e_{i2} + e_{i1} \cdot \Delta(e_{i2}) = \varphi_1(\Delta h_i) \cdot e_{i2} + e_{i1} \cdot \varphi_2(\Delta p_i) \quad (5)$$

отыскивать при ограничениях вида  $c_1(\Delta h_i) + c_2(\Delta p_i) \leq C$ ; другими словами, речь теперь идет об оптимальном распределении средств между этапами для достижения наибольшего повышения общей эффективности.

Вместе с тем несложно видеть, что вышеприведенные рассуждения, позволившие прийти к относительно простому выражению (5), существенно опираются на предположение о независимости случайных величин  $u_i$ ,  $r_i$ . Отметим, что в литературе по методам SFA для одноэтапных процессов (а другие, насколько известно авторам, и не рассматривались) обсуждалась как важная в практическом отношении возможность отказа от предположений: о независимости отдельных между собой  $u_i$  ([4]); о независимости факторов эффективности  $u_i$  и случайного шума  $v_i$  ([13]). Тем более это целесообразно сделать по отношению к факторам независимости отдельных этапов. Уже в работе [13] для построения совместного закона распределения величин  $u_i$ ,  $v_i$  с заранее заданны-

ми свойствами (например, положительная или отрицательная коррелированность) были применены т.н. *corula*-функции. Для случая, когда  $u_i$  усеченное нормальное распределение, в этой работе показано, что необходимые для оценок эффективности могут быть получены; есть все основания полагать, что аналогичный результат может быть установлен и для показательного распределения. Тем самым может быть решена рассмотренная выше задача повышения эффективности многоэтапных процессов при наличии зависимости между факторами эффективности отдельных этапов.

#### Литература

1. Charnes, A. Measuring the efficiency of decision making units / Charnes, A., Cooper W.W., Rhodes E. // Eur. J. Oper. Res. - 1978. - V. 2(6). - P. 429-444.
2. Banker, R. D., Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis / Rajiv D. Banker, A. Charnes,

- W. W. Cooper // Management Science. – 1984. – V. 30. – P. 1078-1092.
3. Aigner, D. Formulation and estimation of stochastic frontier production function models / Dennis J. Aigner, C. A. Knox Lovell, Peter Schmidt // Journal of Econometrics. – 1977. – V. 6. – P. 21–37.
  4. Соколов, Ю.А. Эффективность банковской деятельности / Ю.А. Соколов, В.В. Шергин. – М: АНК ИЛ, 2012.
  5. Heshmati, A. Performance Analysis of Power Plants under Heterogeneous Technologies with Meta Frontier Framework / Almas Heshmati, Sangchoon Lee, Wonsik Hwang // Int. J. of Economics and Management Engineering. – 2012. - V. 2, No. 1. - P. 5-14.
  6. Boyd, G. Estimating Plant Level Energy Efficiency with a Stochastic Frontier / Gale A. Boyd // The Energy Journal. – 2008. - V. 29, No. 2. P. 23-43.
  7. Chung, W. Review of building energy-use performance benchmarking methodologies / William Chung // Applied Energy. - 2011. – V. 88. – P. 1470–1479.
  8. Лейбенштейн, Х. Х-эффективность / Х. Лейбенштейн // Теория фирмы. – СПб., 1995. – С. 497–504.
  9. Айвазян, С. А. Оценка мероприятий, направленных на управление факторами неэффективности / С. А. Айвазян, М. Ю. Афанасьев // Прикл. эконометрика. – 2007, № 4. – С. 27–41.
  10. Айвазян, С. А. Оценка экономической эффективности перехода к достижимому потенциалу / С. А. Айвазян, М. Ю. Афанасьев // Прикл. эконометрика. – 2009, № 3. – С. 43-55.
  11. Liu, J.S. Data envelopment analysis 1978–2010: A citation-based literature survey/ John S. Liu [и др.] // Omega. – 2013. – V. 41, Issue 1. – P. 3–15.
  12. Шергин В., Некоторые вопросы применения граничных методов оценки эффективности сложных процессов / Шергин В.В., Тальянов С.Ю, Катков В.А. // 15-я Международная научно-практическая конференция «Экономика, экология и общество России в 21-м столетии». Сборник научных трудов. - СПб, изд-во Политехнического университета, 2013. – С. 435-439.
  13. Smith, M. D. Stochastic frontier models with dependent error components / Murrey D. Smith // Econometrics Journal. – 2008. – V. 11. – P. 172–192.

УДК 519.86

## ПРОБЛЕМЫ ЗДОРОВОГО ПИТАНИЯ: ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ СПРОСА И ПРЕДЛОЖЕНИЯ НА ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МАСЛОЖИРОВЫЕ ПРОДУКТЫ

*Фудько Александра Александровна (a.fudko@mail.ru)*

*ФГБОУ ВПО «Ивановский государственный химико-технологический университет»*

В статье рассматриваются проблемы нарушения структуры питания населения России, оценивается реальная структура питания и ее близость к «идеалу». На основе статистических данных предлагается подход к формированию оптимального «портфеля потребления» масложировой продукции, а также рассматривается зависимость между ценой отдельных масложировых продуктов и их составом и предлагается подход к построению моделей спроса и предложения на эти продукты.

**Ключевые слова:** структура питания населения, функциональные («здоровые») продукты, жирнокислотный состав, спред, «портфель потребления», спрос на жиросодержащие продукты.

Сегодня в свете развития пищевых технологий у человечества появилась масса возможностей по исследованию и производству различных продуктов. Однако параллельно с этим появились и новые проблемы в виде целого ряда болезней, связанных с питанием. На фоне роста числа хронических заболеваний и установления их причинной связи с несбалансированным питанием, к пищевым продуктам стали относиться и как к эффективному средству поддержания здоровья и снижения риска возникновения многих заболеваний.

Вклад несбалансированного питания в общую смертность среди россиян достигает 12,9 % [1, 2]. Высокий уровень холестерина, избыточное потребление насыщенных жирных кислот и их транс-изомеров, недостаток и неправильное соотношение полиненасыщенных жирных кислот семейств омега-3 и омега-6 в

рационе питания являются причиной возникновения сердечно-сосудистых и онкологических заболеваний, занимающих первое и второе места по смертности соответственно. Сложившуюся ситуацию в структуре питания населения России специалисты расценивают как кризисную, способную вызвать его дальнейшую депопуляцию. По данным Росстата на 2012 г. [3] в России потребление основных пищевых продуктов не соответствует рекомендуемым нормам. Наблюдаются отклонения как в сторону как избыточного, так и недостаточного потребления отдельных продуктов, что отрицательно сказывается на здоровье. Соответствие нормам составляет по разным видам продуктов от 23 до 69% [4]. Нарушение физиологических норм питания в значительной степени обусловлено не только низким уровнем жизни населения (вопреки сложившемуся мне-