нию; 4) сроком до погашения; 5) наличием или отсутствием купонного платежа; 6) периодичностью выплат купонного дохода в течение года. Однако при численном совпадении дюрации, дисконтированной на единичный период времени по ставке доходности к погашению, несмотря на все различия, такие облигации будут обладать одинаковой ценовой неустойчивостью, иначе говоря, будут идентичными в пределах схемы «ценовая неустойчивость – доходность к погашению», т.е. будут демонстрировать одинаковую реакцию на изменения рыночного курса. Причем предложенный инструментарий отражает довольно необычное для финансовых инвестиций математическое свойство облигаций, когда меньшая дюрация свидетельствует об их большей надежности, что относится к облигациям, обладающим более коротким сроком до погашения и более высокой годовой ставкой доходности к погашению.

Литература

1. Bierwag G., Kaufman G., Toevs A. Duration: Its Development and Use in Bond Portfolio Management//Financial Analysts Journal. 1980. №4. P. 15-35.
2. Brooks R., Livingston M. A Closed-Form Equation for Bond Convexity//Financial Analysts Journal. 1989. №6. P. 78-79.
3. Chua J.H. A Generalized Formula for Calculation Bond Duration//Financial Analysts Journal. 1988. №5. P. 65-67.
4. Dunetz M.L., Mahoney J.M. Using Duration and Convexity in the Analysis of Callable Bonds//Financial Analysts Journal. 1988. №3. P. 53-72.
5. Hopewell M.H., Kaufman G.G. Bond Price Volatility and Term to Maturity: A Generalized Respecification//American Economic Review. 1973. №4. P. 4749-4753.
6. Ilmanen A. How Well Does Duration Measure Interest Rate Risk?//Journal of Fixed Income. 1992. №4. P. 43-51.
7. Kahn R, Lochoff R. Convexity and Exceptional Return//Journal of Portfolio Management. 1990. №2. P. 43-47.
8. Nawalkha S.K., Lacey N.J. Closed-Form Solutions of Higher-Order Duration Measures//Financial Analysts Journal. 1988. №6. P. 82-84.
9. Reilly F.K., Sidhu R.S. The Many Uses of Bond Duration//Financial Analysts Journal. 1980. №4. P. 58-72.
10. Weil R.L. Macauley's Duration: An Apperication//Journal of Business. 1973. №4. P. 589-592.

УДК 519.213, 519.214, 519.866

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ CI-ОБРАЗОВ СИММЕТРИЧНЫХ КОПУЛ

Савинов Евгений Анатольевич (easavinov@fa.ru)
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации

Изучается так называемое CI-преобразование копул, основанное на схеме перекрестной независимости случайных векторов. Показано, что проекции фиксированной размерности CI-образов симметричных копул асимптотически независимы, если устремить к бесконечности размерность прообраза. Приведен алгоритм численного моделирования и результаты расчетов мер зависимости для CI-образа многомерной копулы Клэйтона.

Указанное преобразование может быть использовано не только для моделирования новых типов зависимостей при рассмотрении реальных финансовых данных, но и для настройки силы связи при подборе многомерной модели.

Ключевые слова: копула, перекрестная независимость, CI-образ, моделирование зависимостей

Введение

Достаточно давно известно, что многомерное нормальное распределение не является хорошей моделью для описания совместного распределения многих экономических и финансовых переменных. Проблеме поиска более адекватных многомерных моделей посвящено множество статей. Разработано множество методов построения многомерных распределений, использующих маргинальные и смешанные моменты (с условием определенности многомерной проблемы моментов), интегральные преобразования Фурье, Лапласа, совместную воспроизводящую функцию моментов, совместную функцию среднего остатка жизни (см. [1]). Для определения двумерных распределений используются условное и маргинальное распределения, а в [2] рассматривается подход на основе знания только семейств условных распределений (при определенных условиях совместности).

Новый метод построения многомерных распределений и изучения их свойств подарила активно развивающаяся в настоящее время теория копул (см., например, [3]), являющаяся относительно новым направлением в теории распределений.

На сегодняшний день наиболее хорошо изучены двумерные копулы. Известно множество параметрических семейств и методов их получения (конструирования и преобразования). Подробные описания таких методов, разработанных в течение ряда лет разными авторами, приведены, например, в [4] и [5], краткая классификация дана в [6].

Методов моделирования многомерных копул сравнительно не так много. Здесь можно отметить в первую очередь копулы эллиптических распределений, симметричные архимедовы копулы, вложенные архимедовы копулы [7], разложение парных копула-функций (модели ветвизации, или Vine-копулы [8]), обобщенное Darsow-Nguyen-Olsen произведение [9].

Подход, связанный с CI-преобразованием, дополняет существующие методы. Результат об асимптотической независимости CI-образа можно использовать для моделирования зависимости с разной силой связи.

Основные понятия

Определение 1. *n-копулой называется многомерная функция распределения на $[0,1]^n$ с равномерными на $[0,1]$ маргинальными распределениями.*

Теорема 1 (Sklar, 1959). *Пусть H n-мерная функция распределения с маргинальными функциями распределения $F_1, \dots, F_n$. Тогда существует n-копула C такая, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$*

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)).$$

Если $F_1, F_2, \dots, F_n$ непрерывны, то такая C единственная.

Рассмотрим на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{B}, \mathrm{P}\}$ случайный вектор X_n с копулой C и абсолютно-непрерывной функцией распределения

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

где $F_i(x_i)$ маргинальные функции распределения. Обозначим через $f_{1\dots n}(x_1, \dots, x_n)$ совместную плотность распределения вектора X_n, через $f_i(x_i)$ маргинальные плотности, а через $F_{i\,|\,1\dots\hat{\imath}\dots n}(x_i | x_1, \dots, \widehat{x_\iota}, \dots, x_n)$ условную функцию распределения случайной величины X_i, относительно всех остальных компонент вектора (знак ^ означает, что соответствующий элемент пропущен). Введем случайные величины

$$X_{i,n}^* = F_{i\,|\,1\dots\hat{\imath}\dots n}(X_i | X_1, \dots, \widehat{X_\iota}, \dots, X_n).$$

Ввиду дифференцируемости копулы почти всюду можно для почти всех u из $[0,1]^n$ вести обозначение для смешанной производной

$$C_{\hat{\imath}}^{(n-1)}(u) := \frac{\partial^{n-1} C}{\partial u_1 \dots \partial \widehat{u_\iota} \dots \partial u_n}(u_1, \dots, u_n), \qquad (1)$$

$$\mathring{C}_{\hat{\imath}}^{(n-1)}(u) := \frac{C_{\hat{\imath}}^{(n-1)}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)}{C_{\hat{\imath}}^{(n-1)}(u_1, \dots, 1, \dots, u_n)}. \qquad (2)$$

Определение 2. *CI-преобразованием (Cross-Independence) абсолютно непрерывной копулы C будем называть отображение*

$$C(u) \mapsto C^{cit}(u) = \mathrm{P}\{X_{1,n}^* \ u_1, \dots, X_{n,n}^* \ u_n\},$$
$$u = (u_1, \dots, u_n),$$

где $X_n = (X_1, \dots, X_n)$ произвольный вектор с копулой C.

Нетрудно видеть, что CI-образ копулы C действительно является копулой, и зависит только от C.

Основной результат

Далее будем считать, что $C_n(u_1, \dots, u_n)$, $n = 2,3, \dots$ некоторая последовательность симметричных копул, обладающее свойством согласованности.

$$C_{n+1}(u_1, \dots, u_n, 1) = C_n(u_1, \dots, u_n). \qquad (3)$$

Очевидно, что последовательность случайных величин $X_1, X_2, \dots$, построенная на подходящем вероятностном пространстве, с конечномерными распределениями C_n обладает свойством бесконечной перестановочности, что в силу теоремы де'Финетти гарантирует условную-независимость соответствующих случайных величин и представление

$$C_n(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} F(x_k \mid r)\, \mu_\theta(dr), \qquad (4)$$

где θ некоторая случайная величина с распределением μ_θ, а $F(x \mid \theta) = P\{X_1 \ x \mid \theta\}$ регулярная условная функция распределения.

Теорема 2. *Пусть $C_n(u_1, \dots, u_n)$, $n = 2,3, \dots$ последовательность абсолютно-непрерывных симметричных копул, обладающее свойством согласованности (3), причем в представлении (4) функция $F(x \mid r)$ непрерывна по x для μ_θ почти всех r.*

Тогда для любых $k \in \mathbb{N}$ и $(u_1, \dots, u_k) \in (0,1)^k$ при $n \to \infty$

$$C_n^{cit}(u_1, u_2, \dots, u_k, 1, \dots, 1) \to \prod_{i=1}^{k} u_i.$$

Proof. Рассмотрим на измеримом пространстве $\left([0,1]^\infty, \mathcal{B}([0,1]^\infty)\right)$ последовательность случайных величин $X = (X_1, X_2, \dots)$, где $X_i := \omega_i$. По теореме Колмогорова существует вероятностная мера с конечномерными проекциями $C_n(u_1, \dots, u_n)$, которые будут распределениями конечных отрезков $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ последовательности X. При этом $F(x \mid \theta) = \mathrm{P}\{X_1 \ x \mid \theta\}$.

Далее, используя рассуждения, проведенные в доказательстве теоремы де'Финетти ([10], стр. 21) и обозначения

$$F_n = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots), \quad T = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n,$$

можно провести следующие выкладки. Зафиксируем произвольный i. В силу перестановочности для $n \ i$

$$(X_i, X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots) \stackrel{d}{=} (X_i, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots).$$

Тогда

$$P\{X_i \ \ x_i \mid X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots\} \stackrel{d}{=} P\{X_i \ \ x_i \mid F_n\}$$

$$\Rightarrow \quad P\{X_i \ \ x_i \mid X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots\} \stackrel{d}{=} P\{X_i \ \ x_i \mid T\},$$

а с использованием леммы (3.4) ([10], стр. 21),

$$P\{X_i \ \ x_i \mid X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots\} \stackrel{a.s.}{=} P\{X_i \ \ x_i \mid T\}.$$

Учитывая, что $T = \sigma(\theta)$ ([11]),

$$P\{X_i \ \ x_i \mid X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots\} \stackrel{a.s.}{=} F(x_i \mid \theta).$$

Таким образом, по теореме Леви о сходимости условных математических ожиданий при $n \to \infty$

$$X^*_{i,n} = F_{i \mid 1 \dots \hat{\imath} \dots n}(X_i \mid X_1, \dots, \widehat{X_\imath}, \dots, X_n) \stackrel{a.s.}{\to} F(X_i \mid \theta). \quad (5)$$

По условию для μ_θ почти всех r функция $F(x \mid r)$ непрерывна по x . Следовательно, для таких r

$$F\left(F^{[-1]}(u \mid r) \mid r\right) = u,$$

где

$$F^{[-1]}(x \mid r) = \inf\{t : \ F(t \mid r) \ \ x\}.$$

Используя условную независимость величин X_i относительно θ, вычислим совместную функцию распределения системы величин $\{F(X_1|\theta), F(X_2|\theta), \dots, F(X_k|\theta), \theta\}$:

$$P\{F(X_1|\theta) \ \ u_1, \dots, F(X_k|\theta) \ \ u_k, \theta \ \ v\}$$

$$= \int_{-\infty}^{v} P\left\{X_1 \ \ F^{[-1]}(u_1|r), \dots, X_k \ \ F^{[-1]}(u_k|r) \mid \theta = r\right\} \mu_\theta(dr)$$

$$= \int_{-\infty}^{v} \prod_{i=1}^{k} F\left(F^{[-1]}(u_i|r)\middle|r\right) \mu_\theta(dr) = \mathrm{P}\{\theta \ \ v\} \prod_{i=1}^{k} u_i.$$

Следовательно, ввиду (5) при $n \to \infty$

$$P\left\{X^*_{1,n} \ \ u_1, \dots, X^*_{k,n} \ \ u_k\right\} \to P\{F(X_1|\theta) \ \ u_1, \dots, F(X_k|\theta) \ \ u_k\} = \prod_{i=1}^{k} u_i.$$

Замечание 1. *Доказательство теоремы перекликается с работой [12], в которой показана сходимость (5) в случае, когда $F(x \mid r)$ имеет положительную непрерывную плотность при любом r, а мера μ_θ абсолютна-непрерывна с положительной плотностью. Независимость величин $F(X_k|\theta)$ в случае гауссовской смеси показана в статье [13].*

Алгоритм расчета элементов выборки

Процедура моделирования случайного вектора со стохастической зависимостью нужной силы между компонентами, таким образом, будет состоять в получении выборки (размерности k) из распределения $C^{cit}_n(u_1, u_2, \dots, u_k, 1, \dots, 1)$ со специально подобранной исходной размерностью n.

Пусть $C(u) = C_n(u_1, u_2, \dots, u_n)$ последовательность копул, удовлетворяющая условиям теоремы 2. Далее, считая n зафиксированным, будем использовать нижний индекс для C только в соответствии с обозначениями (1) и (2), а размерность копул определять по числу аргументов.

Используем для моделирования выборки с распределением $C(u)$ метод условных распределений и опишем его в обозначениях (2).

Пусть $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ выборка из распределения $U([0,1]^n)$. Тогда набор величин $(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_n)$ таких, что

$$\hat{X}_1 = X_1$$
$$\hat{X}_2 = \mathring{C}_{\hat{2}}^{(1)[-1]_2}(\hat{X}_1, X_2)$$
$$\hat{X}_3 = \mathring{C}_{\hat{3}}^{(2)[-1]_3}(\hat{X}_1, \hat{X}_2, X_3)$$
$$\dots$$
$$\hat{X}_n = \mathring{C}_{\hat{n}}^{(n-1)[-1]_n}(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_{n-1}, X_n)$$

имеет совместное распределение $C(u)$. Заметим, что размерность копулы C, соответствующей обозначению своей производной в строке r, совпадает с номером строки, а сама копула получается из исходной как $C(u_1, \dots, u_r) = C(u_1, \dots, u_r, 1, 1, \dots, 1)$.

Наконец, рассмотрим набор величин $(X^*_1, X^*_2, \dots, X^*_n)$ таких, что

$$X^*_n = \mathring{C}_{\hat{n}}^{(n-1)}(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_n) = X_n$$
$$X^*_{n-1} = \mathring{C}_{\widehat{n-1}}^{(n-1)}(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_n) \quad (6)$$
$$\dots$$
$$X^*_1 = \mathring{C}_{\hat{1}}^{(n-1)}(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_n)$$

В соответствии с определением (2) совместное распределение любого фиксированного набора $(X^*_1, X^*_2, \dots, X^*_k)$, $(k \ \ n)$ будет искомым $C^{cit}_n(u_1, u_2, \dots, u_k, 1, \dots, 1)$.

Результаты численного моделирования

Приведенные далее результаты получены для CI-образа многомерного аналога копулы Клэйтона. Именно, рассматривается копула

$$C(u_1, u_1, \dots, u_n) = \left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} + \dots + u_n^{-\theta} - n + 1\right)^{-1/\theta}, \quad \theta > 0, \qquad n \ \ 2.$$

Для нее очевидно выполняется

$$\mathring{C}_{\hat{i}}^{(n-1)}(u_1, \dots, u_n) = \left(1 - \frac{1 - u_i^{-\theta}}{u_1^{-\theta} + \dots + u_{i-1}^{-\theta} + u_{i+1}^{-\theta} + \dots + u_n^{-\theta} - n + 2}\right)^{-1/\theta - n + 1}$$

$$\mathring{C}_{\hat{i}}^{(i-1)[-1]_i}(u_1, \dots, u_{i-1}, s) = \left(1 - \left(u_1^{-\theta} + \dots + u_{i-1}^{-\theta} - i + 2\right)\left(1 - s^{-\frac{\theta}{(i-1)\theta + 1}}\right)\right)^{-1/\theta}$$

Расчеты приведены для $\theta = 0{,}7$. Для каждого варианта размерности n моделируется $M = 100$ выборок объема $N = 10^5$, рассматриваются двумерные ($k = 2$) проекции на первые две координаты, и вычисляются следующие показатели, которые отражены в таблице 1: средний (по M выборкам) коэффициент корреляции Пирсона (r) и его стандартная ошибка ($r\ err$), средний коэффициент ранговой корреляции Спирмена (ρ_s) и его стандартная ошибка ($\rho_s\ err$), среднее p-значение, полученное при проверке гипотезы значимости коэффициента ρ_s (pv) и стандартная ошибка среднего ($pv\ err$), среднее p-значение для критерия независимости хи-квадрат (p_{χ^2}) и ошибка среднего ($p_{\chi^2}\ err$).

Таблица 1

n	5	10	15	20	25	30	35	40
r	-0.1508	-0.0750	-0.0510	-0.0384	-0.0312	-0.0266	-0.0217	-0.0164
$r\ err$	0.0008	0.0010	0.0010	0.0010	0.0011	0.0009	0.0009	0.0011
ρ_s	-0.1508	-0.0750	-0.0509	-0.0384	-0.0313	-0.0266	-0.0217	-0.0164
$\rho_s\ err$	0.0008	0.0010	0.0010	0.0010	0.0011	0.0009	0.0009	0.0011
pv	$3.6e-43$	$1.63e-9$	$1.08e-4$	0.0133	0.0347	0.0519	0.0977	0.2052
$pv\ err$	$2.1e-43$	$1.36e-9$	$4.41e-5$	0.0066	0.0111	0.0127	0.0154	0.0252
p_{χ^2}	$8.5e-11$	0.0701	0.2520	0.3473	0.3438	0.4252	0.4902	0.4624
$p_{\chi^2}\ err$	$4.3e-11$	0.0120	0.0249	0.0294	0.0261	0.0269	0.0279	0.0280

Из полученных данных видно, что коэффициент ранговой корреляции двумерной проекции CI-образа копулы Клэйтона перестает значимо (на уровне $\alpha = 0.05$) отличаться от нуля при размерности n 30, а критерий χ^2 (при группировке элементов выборки разбиением носителя $[0,1]^2$ на ячейки 30×30) показывает согласие с гипотезой независимости уже, по крайней мере, при n 15.

Возможный алгоритм оценки параметров модели

Рассмотрим одно из возможных приложений модели к описанию реальных данных. Будем предполагать, что некая выборка $\left(X_{1(i)}^*, X_{2(\mathrm{i})}^*\right)_{i=1}^N$ из доходностей двух активов имеет распределение с копулой

$$C_n^{cit}(u_1, u_2, 1, \dots, 1), \qquad (7)$$

где размерность n неизвестна и может подбираться экспериментально.

Для оценки параметров можно использовать двухшаговый метод максимального правдоподобия (например, [7]). Именно, для оценки частных одномерных распределений можно применить одну из моделей с полиномиальным расширением (см. [14]), после чего стандартизировать одномерные распределения (применить к каждому элементу выборки соответствующую оценку функции распределения), получив, таким образом, двумерную выборку с предполагаемой функцией распределения [7]. Чтобы не вводить новых обозначений будем предполагать, что выборка $\left(X_{1(i)}^*, X_{2(\mathrm{i})}^*\right)_{i=1}^N$изначально такова.

Рассмотрим процедуру подбора параметра θ при фиксированном n (сам параметр n подбирается пошаговым изменением и сравнением моделей между собой). Сначала введем в модель новые $N(n-2)$ параметра $\left(X_{3(i)}^*, X_{4(\mathrm{i})}^*, \dots, X_{n(i)}^*\right)_{i=1}^N$ и будем предполагать, что

$$\left(X_{1(i)}^*, X_{2(\mathrm{i})}^*, \dots, X_{n(i)}^*\right)_{i=1}^N$$

n-мерная выборка из распределения $C_n^{cit}(u_1, u_2, \dots, u_n)$. Тогда выборка $\left(\hat{X}_{1(i)}, \hat{X}_{2(\mathrm{i})}, \dots, \hat{X}_{n(i)}\right)_{i=1}^{N}$ как решение системы (6) предположительно обладает распределением $C(u)$, зависящим от одного параметра θ. Остается построить логарифмическую функцию правдоподобия

$$L = \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{\partial^n C}{\partial u_1 \dots \partial u_n} \left(\hat{X}_{1(i)}, \hat{X}_{2(\mathrm{i})}, \dots, \hat{X}_{n(i)}\right)$$

и максимизировать ее по $N(n-2)+1$ переменным.

Несмотря на большое количество параметров, используемое при подгонке модели, итоговая модель имеет простой вид, зависящий (в рассматриваемом случае копулы Клэйтона) только от параметра θ (при фиксированном n). Интересной задачей может быть исследование свойств полученной таким образом оценки.

Наконец, варьируя размерность n, можно добиться наилучшего согласие модели с данными.

Заключение

Таким образом, инструментарий задач подбора многомерных моделей для финансовых данных с одной стороны дополняется новым классом CI-образов копул известных семейств, не всегда имеющих явный аналитический вид, но не сложных для моделирования и оценки параметров, а с другой стороны получает еще один способ регулирования силы зависимости за счет выбора размерности исходной копулы (при фиксированной размерности данных).

Литература

1. Barry Arnold, Hassan Zahedi. On multivariate mean remaining life functions — J. of Multivariate Analysis, 1998, N 25, p. 1–9.
2. Barry Arnold, Enrique Castillo, Jose M. Sarabia. Conditional Specification of Statistical Models. Springer, 1999, 436 p.
3. Piotr Jaworski, Fabrizio Durante, Wolfgang Karl Hardle, Tomasz Rychlik. Copula Theory and Its Applications: Proceedings of the Workshop Held in Warsaw, 25-26 September 2009 (Lecture Notes in Statistics, Lecture Notes in Statistics - Proceedings). Springer, 2010, 341 p.
4. Balakrishnan N., Lai C.-D. Continuous bivariate distributions. Springer, 2009, 712 p.
5. Nelsen R. An Introduction to Copulas. Second Edition, Springer-Verlag, New York, 2006, 276 p.
6. Благовещенский Ю.Н. Основные элементы теории копул. — Прикладная эконометрика, 2012, №2(26), с. 113–130.
7. Фантаццини Д. Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций - I. — Прикладная эконометрика, 2011, №2, Т .22, с. 98–134.
8. Kurowicka D., Joe H. Dependence Modeling: Vine Copula Handbook, Singapore, 2010, 368 p.
9. Christophe Laforge. Construction of Multivariate Copulas and the Compatibility Problem. [online] http://ssrn.com/abstract=956041, 2007.
10. Aldous D. Exchangeability and related topics. Lecture Notes in Math. 1117, Springer, Berlin, 1985, 198 p.
11. Olshen R. A note on exchangeable sequences. — Z.Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, Springer, 1973–1974, Vol. 28, p. 317–321.
12. Кнутова Е.М., Шатских С.Я. Асимптотические свойства условных квантилей для одного класса симметрических распределений. — Теория вероятн. и ее примен., 2006, Т. 51, в. 2, с. 374–382.
13. Шатских С.Я. Устойчивые эллиптически контурированные меры в гильбертовом пространстве: асимптотические свойства условных распределений. — Изв.РАЕН серия МММИУ, 1999, Т. 3, №3, с. 43–81.
14. Li H., Melnikov A. Polynomial extensions of distributions and their applications in actuarial and financial modeling. -- Insurance Mathematics & Economics, 2014, V.55, pp. 250-260.