Модели показывают, на сколько процентов изменится чистая (базовая) прибыль, если брутто-прибыль (чистая прибыль) изменится на данное количество процентов.

Структурная модель позволяет четко определить вклад собственного и заемного капитала в формирование чистой прибыли:

$$ЧП = ROA \cdot \overline{СК} + ЭФР_{ЗК} \cdot \overline{СК} \qquad (21)$$

Первое слагаемое соответствует вкладу собственного капитала, а второе слагаемое – вкладу заемного капитала.

Таким образом, структурные модели анализа рентабельности совокупного и собственного капитала проще, практичнее и информативнее мультипликативных, в которых одни и те же показатели являются факторами первого и второго порядка, что приводит к трудностям в интерпретации и практическом применении результатов расчетов. Именно поэтому структурные модели должны быть основными моделями в экономическом анализе эффективности использования капитала. После того как рентабельность капитала в достаточной степени будет структурирована, анализ рентабельности его структурных компонентов (*ROK*, $R_{ФИ}$, $R_{ПК}$) может быть продолжен с помощью мультипликативных моделей.

Литература

1. Когденко, В.Г. Особенности анализа консолидированной отчетности (на примере анализа показателей финансового рычага)/ В.Г.Когденко // Экономический анализ: теория и практика. - 2012. - №36 (291). – С.13-22.
2. Савицкая, Г.В. Экономический анализ: Учеб./ Г.В. Савицкая. – 10-е изд., испр. – М.: Новое знание, 2004. – С.440.
3. Damodaran, Aswath, Return on Capital (ROC), Return on Invested Capital (ROIC) and Return on Equity (ROE): Measurement and Implications (July 2007). Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=1105499 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1105499

УДК 334 338.2

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ СЛУЧАЙНЫМИ ФАКТОРАМИ, ВЛИЯЮЩИМИ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ СЛОЖНЫХ ПРОЦЕССОВ

Тальянов Сергей Юрьевич (stalyanov@list.ru)

ФГБОУ ВПО «Ивановский государственный химико-технологический университет»

В статье исследуются многоэтапные модели для оценки эффективности стохастическими граничными методами. Предлагается метод моделирования возможной зависимости между случайными величинами, отображающими снижение эффективности на отдельных этапах. Предполагается, что эти величины имеют показательное распределение. Для задания их совместной функции распределения используются FGM-копулы. Показано, что в этом случае возможно получить относительно простое выражение для функции правдоподобия.

Ключевые слова: стохастические граничные методы; оценка эффективности; зависимые случайные величины; показательное распределение; копула-функции

Достаточно хорошо известно, что проявления неопределенности внешней среды не всегда независимы друг от друга. В экономико-математических исследованиях, использующих теоретико-вероятностное представление неопределенностей, речь может идти о зависимых или независимых случайных величинах. В стохастических граничных методах оценки эффективности (SFA, Stochastic Frontier Approach) случайные величины – один из основных элементов математической модели. Они отображают отклонение фактического результата деятельности отдельных оцениваемых экономических объектов от предполагаемого оптимума. Оценка возможной взаимозависимости этих отклонений может, в частности, существенно уточнить прогноз будущего развития изучаемых предприятий, внести коррективы в планируемые мероприятия по повышению эффективности. Надо отметить, что эта проблема уже затрагивалась в исследованиях, посвященных SFA [1,2,3]. Однако эти работы, как и практически все остальные в этой области, относились к простым процессам преобразований входного ресурса (или ресурсов) в конечный результат. При переходе к изучению многоэтапных процессов последовательного преобразования «входа» X по схеме $X \to Z_1$ (промежуточный продукт 1) $\to Z_2 \to \ldots \to Y$ (конечный продукт), возникает принципиально новая задача – моделирования зависимости между случайными факторами, влияющими на эффективность отдельных этапов; исследованию данного вопроса и посвящена настоящая работа.

Граничные методы оценки эффективности в целом представлены двумя основными самостоятельными направлениями – непараметрическими и стохастическими методами, обладающими определенным набором преимуществ и проблем каждое; существенное продвижение в одном из них предопределяет интерес к развитию другого. Они являются признанным инструментом изучения экономической эффективности, как в зарубежной, так и в последнее десятилетие и в отечественной научной литературе. Сфера их применения чрезвычайно широка, охватывает практически все отрасли промышленности, энергетику, торговлю, сельское хозяйство, банковский сектор, медицину, образование, спорт, экологию, государственное и муниципальное управление. Стохастические граничные методы, при известной сложности теоретического анализа моделей и их практической реализации, привлекательны тем, что отклонение от максимальной эффективности здесь рассматривается как имманентное свойство действующего субъекта. Тем самым, в частности, открывается возможность логически корректной постановки задачи оптимизации (повышения эффективности), что, собственно, и было сделано в ряде работ (например, [4]). При этом в отличие от непараметрических методов, можно также ставить и анализировать задачи прогнозирования и оценивания степени тех или иных рисков. Стоит отметить и значительное место, отведенное стохастическим методам, в обзорах, посвященных математическим инструментам для оценки эффективности в энергетике [5].

В целом можно отметить, что результаты, полученные посредством стохастических методов, более пригодны для объективного анализа и непосредственного построения содержательных выводов, в то время как непараметрический подход лишь создает исходные данные для последующего во многом традиционного эконометрического анализа. Эти обстоятельства до недавнего времени определяли в целом интерес к стохастическим методам и их практическому применению, в целом сравнимый с интересом к непараметрическим методам. Но относительно недавно сфера применения непараметрических методов заметно увеличилась: были представлены модели для оценки эффективности многоэтапных процессов (среди заметного числа работ по этому вопросу отметим, например, публикации [6,7], а также обзор [8]); тем самым эти методы стали «монополистами» в задачах описания многих реальных экономических ситуаций. Возможно, приводимые ниже соображения будут способствовать развитию стохастических методов.

Напомним, что, согласно основным положениям SFA, при моделировании одноэтапного процесса X → Y результат деятельности фирмы представляется в виде

$$y_i = y_i^{опт} - u_i + v_i, \qquad (1)$$

где i – индекс, идентифицирующий отдельную фирму;

$i = 1,\dots,n$, $y_i = y_i(x_i)$ – фактический результат деятельности данной фирмы за определенный период времени;

$y_i^{опт}$ - наилучший возможный при данном сочетании затрат ресурсов x_i результат;

$u_i \geq 0$ – одностороннее отклонение от оптимума, случайная величина, «фактор неэффективности»;

v_i - произвольного знака случайная величина, «случайный шум» (здесь подразумевается, что лучшим является наибольшее значение результата, что может быть принято, если речь идет о выпуске продукции в натуральном или стоимостном выражении).

Следует отметить, что представление (1) не является единственно возможным, но его весьма частое использование во многом оправдывается тем, что здесь удобно получать логарифмированием мультипликативной производственной функции

$$Y_i = AX_{1i}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot X_{mi}^{\alpha_m}, \qquad (2)$$

связывающей результат Y_i и затраты ресурсов $X_{1i}^{\alpha_1}$, …, $X_{mi}^{\alpha_m}$.

Здесь может исследоваться зависимость между u_i и v_i для некоторого фиксированного индекса i, зависимость между различными величинами u_i или зависимость между различными величинами v_i. Последняя возможность не рассматривается, что представляется вполне логичным; исследованию первых двух посвящены, в частности, работы [2, 3] и [1].

При переходе к многоэтапным процессам появляется еще одна возможность – наличия зависимости между факторами неэффективности различных этапов. Учесть эту возможность целесообразно по двум обстоятельствам. Во-первых, реально правдоподобно, что эффективность работы одного их этапов может влиять на эффективность работы последующих: ритмичность поставок продукции, сверхплановые затраты на одном из этапов, в том случае, когда поставщик и заказчик имеют общий источник финансирования и т.п. могут влиять на деятельность отдельных фирм в рассматриваемой цепочке. Кроме того, предположение о независимости есть ограничение, которое далеко не всегда модно проверить на практике, что существенно сужает область применения теоретических разработок.

Рассмотрим многоэтапный процесс $Z_0 \equiv X \to Z_1 \to Z_2 \to \ldots \to Z_k \equiv Y$; примем, что все рассматриваемые величины – скалярные, не векторные, то есть речь идет об одном ресурсе и одном продукте на каждом этапе (обобщения вполне возможны), и предположим, что для каждого из k этапов, s=1,2,…, k, имеют место соотношения вида (1):

$$z_{is} = z_{is}^{опт} - u_{is} + v_{is}, \qquad (3)$$

Примерами таких процессов могут служить многостадийные текстильные производства (прядение→ткачество→отделка), процессы производства и передачи электрической и тепловой энергии и многие другие. В моделях (1), (3) подлежат оценке параметры функций, задающих связь между и затратами соответствующих ресурсов, и параметры законов распределений случайных величин u_{is} и v_{is}.

Предположим, что связь между «входом» и оптимальным «выходом» каждого этапа линейная: более подробное изучение этого вопроса – предмет самостоятельного исследования, однако заметим, что это предположение вполне согласуется с мультипликативным представлением (2). Тогда для выхода последнего этапа можно получить представление вида

$$y_{ts} = Ax_{ts} + B - (c_1 u_{t1} + c_2 u_{t2} + \dots + c_k u_{tk}) + (c_1 v_{t1} + \dots + c_k v_{tk}).$$

Коэффициенты c_s выражаются через a_j, $j < s; c_k = 1$. Для оценки параметров в приведенных соотношениях применяется преимущественно метод максимального правдоподобия, что требует отыскания явного аналитического представления для плотности распределений, в частности, случайных величин $U_t = c_1 u_{t1} + c_2 u_{t2} + \dots + c_k u_{tk}$, $V_t = c_1 v_{t1} + \dots + c_k v_{tk}$, а также $W_t = -U_t + V_t$.

В том случае, когда случайные величины u_{ts}, v_{ts} независимы, требуемый результат, как хорошо известно из курса теории вероятностей, получается применением операции свертки. При переходе к зависимым случайным величинам требуется задание совместного закона распределения этих величин. Выбор способа решения данной задачи подчинен, по крайней мере, двум требованиям. Во-первых, желательно иметь возможность варьировать степень зависимости между связываемыми данным законом случайными величинами; во-вторых, предпочтение следует отдать тому случаю, когда итоговое представление для плотностей содержит только элементарные функции – исключение в SFA делается только для функции распределения нормального закона Φ(x).

По результатам анализа имеющихся результатов, в частности, упомянутых работ [1-3], можно предложить следующее.

Рассмотрим сначала двухэтапный процесс $X \to Z_1 \to Y$. Предположим, что обе случайные величины u_{i1} и u_{i2} имеют показательное распределение с параметрами μ_1 и μ_2, то есть

$$f_{u_{is}}(x) = g(x, \mu_s) = \mu_s \exp(-\mu_s x), x \ge 0; \ g(x, \mu_s) = 0, x < 0; s = 1,2.$$

Напомним, что копулами называют функции $C(x, y)$, определенные на множестве [0;1]× [0;1], возрастающие по каждой переменной *x* и *y*, то есть в случае $x_1 < x_2$ и $y_1 < y_2$ выполнено условие:

$$C(x_2, y_2) + C(x_1, y_1) - C(x_1, y_2) - C(x_2, y_1) \ge 0,$$

и такие, что

$$C(x, 0) = 0, C(0, y) = 0, C(x, 1) = x, C(1, y) = y$$

Известно (теорема Скляра), что если заданы частные функции распределения $F(x) = P(X < x)$ и $G(y) = P(Y < y)$ и $H(x, y)$ – совместная функция распределения двух случайных величин (X, Y), то существует такая копула C, что $H(x, y) = C(F(x), G(y))$; другими словами, посредством копул можно связать две случайных величины любым заданным способом.

Функции из семейства FGM-копул (Farlie–Gumbel–Morgenstern) задаются формулой

$$C_\theta(x, y) = xy + \theta xy(1 - x)(1 - y).$$

Здесь регулирующий зависимость параметр θ лежит в пределах $-1 \le \theta \le 1$.

Ссоответствующая плотность распределения будет иметь вид:

$$h(x, y) = (1 + \theta(1 - 2x)(1 - 2y)) f(x) g(y),$$

где $f(x)$, $g(y)$ – плотности распределений случайных величин *X* и *Y*.

Для случайных величин u_{i1} и u_{i2} после преобразований получаем

$$f(x, y) = (1 + \theta) g(x, \lambda_1) g(y, \lambda_2) + \theta g(x, 2\lambda_1) g(y, 2\lambda_2) - \theta g(x, 2\lambda_1) g(y, \lambda_2) - \theta g(x, \lambda_1) g(y, 2\lambda_2),$$

где $g(x, \lambda)$ – плотность распределения случайной величины, имеющей показательное распределение с параметром λ.

$$f_U(x) = (1 + \theta)\varphi(x, \lambda_1, \lambda_2) + \theta\varphi(x, 2\lambda_1, 2\lambda_2) \quad \theta\varphi(x, 2\lambda_1, \lambda_2) - \theta\varphi(x, \lambda_{1,2\lambda_2}),$$

где при $\lambda \ne \mu$

$$\varphi(t,\lambda,\mu) = \int_0^t g(x,\lambda) g(t-x,\mu)dx = \frac{\lambda}{\lambda-\mu} g(x,\mu) - \frac{\mu}{\lambda-\mu} g(x,\lambda). \quad (4)$$

(во всех соотношениях случай совпадения параметров показательных распределений исследуется отдельно аналогичным образом).

Таким образом, для плотности распределения случайных величин U_i получено аналитическое представление, содержащее только элементарные функции.

Далее, для одноэтапных процессов, в которых факторы неэффективности u_i имеют показательное распределение с параметром μ, известно выражение для плотности распределения случайных величин W_i. Оно имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} g(t,\mu) \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right) dt = \mu \exp\left(\frac{\mu^2\sigma^2}{2} + x\mu\right) \cdot \Phi\left(-\frac{\sigma^2\mu + x}{\sigma}\right), \quad (5)$$

где σ – параметр нормального распределения случайной величины V_i, то есть удовлетворяет сформулированному выше условию (кроме элементарных функций, включает только Φ(x)). Несложно проверить, что, подставляя в (5) вместо функции $g(t,\mu)$ функцию $\varphi(t,\lambda,\mu)$ из (4), мы снова получим выражение, обладающее тем же свойством.

Таким образом, применение FGM-копул совместно с показательным распределением позволяет в SFA-моделях получать для плотностей распределений рассматриваемых случайных величин «почти-элементарные» представления, что позволяет без дополнительных сложностей применять метод максимального правдоподобия (что не всегда возможно даже в случае одноэтапных процессов, [9]).

Отметим в заключение некоторые проблемы и возможные направления дальнейшего исследования.

1. Приведенные построения опиралась на предположение о том, что отдельные факторы неэффективности имеют показательный закон распределения. Представляет интерес расширить множество законов распределений, позволяющих получать «почти элементарное» представление для функции правдоподобия.

2. Очевидный интерес представляет и обобщение приведенных результатов на случай трех и более этапов; при этом необходимо, прежде всего, определить подходящий вид многомерной копулы. В этой связи могут оказаться полезными результаты работы [10].

3. Заметным недостатком FGM-копул является ограничение на возможное значение коэффициента корреляции между связываемыми случайными величинами (не более одной трети по абсолютной величине). Вопрос о возможности его ослабления пока остается открытым.

Литература

1. Соколов, Ю.А. Оценка эффективности деятельности кредитных организаций / Ю.А. Соколов, В.В. Шергин. – М., «Анкил», 2012 – 200 с.
2. Bandyopadhyay, D. On measures of technical inefficiency and production uncertainty in stochastic frontier production model with correlated error components / Debdas Bandyopadhyay, Arabinda Das // Journal of productivity analysis. – 2006. – V. 26, No 2. – P. 195–180.
3. Smith, M. D. Stochastic frontier models with dependent error components / Murrey D. Smith // Econometrics Journal. – 2008. – V. 11. – P. 172–192.
4. Айвазян, С.А. Оценка экономической эффективности перехода к достижимому потенциалу./ С.А. Айвазян, М.Ю. Афанасьев // Прикладная эконометрика. - 2009, №3(15) - С. 43-55.
5. Chung, W. Review of building energy-use performance benchmarking methodologies / William Chung // Applied Energy. – 2011. – V. 88. – P. 1470–1479.
6. Ebrahimnejad, A. A three-stage Data Envelopment Analysis model with application to banking industry / Ali Ebrahimnejad [и др.] // Measurement. – 2014. – V. 49. – P. 308–319.
7. Wei, Q. Composite network Data Envelopment Analysis model / Quanling Wei, Hong Yan And Liyong Pang // International Journal of Information Technology & Decision Making. – 2011. – V. 10, No. 4. – P.613–633.
8. Zhou, P. A survey of data envelopment analysis in energy and environmental studies / P. Zhou, B.W. Ang, K.L. Poh. // European Journal of Operational Research. – 2008. – V. 189. – P. 1–18.
9. Greene, W. A Gamma–Distributed Stochastic Frontier Model / William Greene // Journal of Econometrics. – 1990. – V. 46. – P. 141–163.
10. Aas, K. Pair-copula constructions of multiple dependence / Kjersti Aas [и др.] // Insurance: Mathematics and Economics. – 2009. – V. 44. – P. 182–198.