МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ

УДК 336.051

ДЮРАЦИЯ И ВЫПУКЛОСТЬ ОБЛИГАЦИИ: КОНЦЕПЦИЯ И УНИВЕРСАЛЬНЫЙ ИНСТРУМЕНТАРИЙ ИЗМЕРЕНИЯ

Лисица Максим Иванович (lisitsa1974@mail.ru)
Университет при Межпарламентской Ассамблее ЕврАзЭС

Статья посвящена математической формализации одновременной взаимной связи рыночного курса облигации с остальными ее количественными параметрами, фиксируемыми в рамках процедуры эмиссии (номинальной стоимостью, годовой ставкой доходности к погашению, сроком до погашения, годовым купонным платежом, числом выплат купонного дохода в год), что графически отражается через выпуклость, сведенную в дюрацию – средневзвешенную продолжительность платежей по облигации. При этом основная цель исследования заключается в разработке универсального (в пределах любого срока до погашения и любого числа выплат купонного дохода в год) подхода к вычислению дюрации облигации, для чего предполагается решение задач, в частности, обзор публикаций в заявленной области, математическая формализация инструментария вычисления дюрации, анализ (с помощью графических иллюстраций) математических свойств изложенного инструментария. Работа опирается на изданные и при этом общедоступные научные статьи специалистов в заявленной области. Математическая формализация инструментария осуществляется на основе алгебраических преобразований модели дисконтированного денежного потока в ее частные случаи. Для обеспечения наглядности применяются графические иллюстрации, в увеличенном виде отражающие математические свойства изложенного инструментария, основной особенностью которого является то, что дюрация, дисконтированная на единичный период времени по ставке доходности к погашению, является приблизительной процентной мерой ценовой неустойчивости облигации, поскольку отражает прямолинейное изменение рыночного курса облигации, хотя математически рыночный курс облигации меняется по нелинейной траектории, образующей так называемую выпуклость, однако искажения в оценках малозаметны. Соответственно, дюрация является полезным и перспективным инструментом, позволяющим понять особенности проявления риска при инвестициях в облигации.

Ключевые слова: бескупонная облигация, классическая облигация, рыночный курс облигации, годовая ставка доходности к погашению по облигации, годовой купонный платеж по облигации, число выплат купонного дохода в год, номинальная стоимость облигации, срок до погашения облигации, выпуклость облигации, дюрация облигации, ценовая неустойчивость облигации.

Облигация для ее держателя является ценностью благодаря своим количественным характеристикам, направленным на генерирование дохода, достающегося держателю облигации и фиксируемого им обычно (хотя здесь есть разные варианты) в виде прироста денежных средств. Укажем на эти параметры: 1) номинальная стоимость (также называемая номиналом); 2) годовая ставка доходности к погашению; 3) срок до погашения; 4) наличие обязательства выкупа по номинальной стоимости в момент истечения срока погашения; 5) наличие или отсутствие купонного платежа (также называемого купонным доходом); 6) периодичность выплат купонного дохода в течение года. Разумеется, перечисленные характеристики взаимосвязаны, из-за чего при управлении пакетами облигаций возникают неудобства, если учитывать все количественные характеристики облигаций, в отличие, например, от управления портфелями акций в рамках схемы «риск – доходность». Однако в работах [1, 2, 5, 9, 10], посвященных исследуемой области, указывается на отсутствие надобности анализировать все количественные характеристики облигаций, поскольку они могут быть сведены в дюрацию, благодаря чему становится возможным управление пакетами облигаций в пределах схемы «ценовая неустойчивость – доходность к погашению».

Таким образом, возникла необходимость универсальной (пригодной для любого срока до погашения, а также для любой периодичности выплат купонного дохода в течение года, включая нулевую, как в случае с бескупонными облигациями) математической формализации дюрации облигаций, поскольку представленный в перечисленных выше работах инструментарий, кроме того, изложенный в публикациях [3, 4, 8], несмотря на их названия, все же таковым не являлся. На эту проблему, когда дюрация измеряется на сроке до погашения облигаций в виде целого числа лет, а также единичной периодичности выплат купонного дохода в течение года, указано в статьях [6, 7].

В общем, если опираться на открытые для свободного доступа источники информации, то охарактеризованного выше универсального инструментария определения дюрации облигаций не обнаруживается. Соответственно, данное обстоятельство открывает возможность решить имеющуюся проблему, чем непосредственно и займемся.

Рыночный курс бескупонной облигации вариативен, а приобретение бескупонной облигации по имеющемуся рыночному курсу определяет размер вложенного в нее капитала. Тогда связь номинальной стоимости и рыночного курса можно установить посредством модели (1) через доходность, которая при условии погашения бескупонной облигации по номиналу гарантируется держателю, конечно, если держатель намеревается дождаться ее погашения, т.е. выплаты номинальной стоимости в установленный в процессе эмиссии бескупонной облигации срок. Обозначенная доходность является величиной не только фактической, но еще и ожидаемой, причем одновременно. Ее называют доходностью (или ставкой доходности) к погашению. Она отражает финансовый результат, который приносит в течение единицы времени (например, в течение одного года) каждая единица (например, один рубль) стоимости облигаций в случае их погашения. Зная номинал (зафиксированный в рамках эмиссии) и рыночный курс (зафиксированный в результате покупки), можно рассчитать доходность к погашению бескупонной облигации с помощью формулы (2):

$$P_b = \frac{P_{b,nom}}{(1+Y_b)^{t/W}} \tag{1}$$

$$Y_b = \sqrt[t/W]{\frac{P_{b,nom}}{P_b}} - 1 \tag{2}$$

1)	t – год	$W = 1$
2)	t – полугодие	$W = 2$
3)	t – квартал	$W = 4$
4)	t – месяц	$W = 12$
5)	t – день	$W = 365$

(3)

где P_b – рыночный курс облигации b;

$P_{b,nom}$ – номинальная стоимость облигации b;

Y_b – годовая ставка доходности к погашению по облигации b;

t – срок до погашения облигации b;

W – делитель.

Обсудим записи (1), (2), (3). Делитель (W), представленный в матрице (3), обеспечивает математическую точность взаимным связям между рыночным курсом (P_b), годовой ставкой доходности к погашению (Y_b) и номинальной стоимостью ($P_{b,nom}$), причем величина делителя (W) определяется единицей времени (год, полугодие, квартал, месяц, день), принятой для исчисления срока до погашения (t). Иначе говоря, делитель (W) фиксирует число, которое характеризует единицу времени, составляющую один год. На практике наиболее часто встречающейся (следовательно, востребованной) единицей времени является день, т.е. отраженный в матрице (3) 5-й случай, очевидно, в связи с ежедневным совершением сделок куплипродажи с бескупонными облигациями. Остальные зафиксированные в матрице (3) случаи (1-й, 2-й, 3-й, 4-й) вряд ли востребованы на практике, но теоретически вполне могут быть представлены.

Особенность классической облигации заключается в наличии связи рыночного курса с номиналом, купонным платежом, числом выплат купонного дохода и сроком до погашения. Обозначенную взаимную связь можно математически корректно формализовать посредством выражения (4) через доходность к погашению, причем погашением классической облигации в данной ситуации считается не только выплата номинальной стоимости в установленные при эмиссии сроки, но еще и купонного дохода, причем в полном объеме:

$$P_b = \frac{1}{s} \cdot \frac{CF_b}{(1+Y_b)^{1/s} - 1} \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+Y_b)^{t/W}}\right) + \frac{P_{b,nom}}{(1+Y_b)^{t/W}} \tag{4}$$

где CF_b – годовой купонный платеж по облигации b;

s – число выплат купонного дохода в год.

Обсудим запись (4). Если в отношении нее применить матрицу (3), то здесь будут уместны аналогичные выводы, что и для моделей (1), (2). Однако имеется и очевидное отличие. Оно заключается в том, что делитель (W) обеспечивает математическую точность взаимным связям между рыночным курсом (P_b), годовой ставкой доходности к погашению (Y_b), номинальной стоимостью ($P_{b,nom}$) и годовым купонным платежом (CF_b).

Обозначенные выше математические взаимодействия рыночного курса с другими параметрами ведет к возникновению феномена ценовой неустойчивости облигаций (причем как бескупонных, так и классических). Для количественного исследования названного феномена необходимо обратиться к такой характеристике облигации как ее дюрация (говоря по-другому, длительность или продолжительность). Она показывает средневзвешенный срок выплат купонного дохода и/или номинальной стоимости (далее – выплат или платежей), который остается до момента погашения облигации. Нередко встречаются случаи (разумеется, условного) сравнения дюрации облигации с ее так называемой «зрелостью». При этом дюрацию можно определить с помощью выражения (5), исходя из равенства числа выплат и числа периодов времени между платежами:

$$\mu_{b,t,s} = \frac{CF_{b,s}}{P_b} \cdot \sum_{U}^{u} \frac{U}{(1+Y_{b,s})^{U}} + \frac{P_{b,nom}}{P_b} \cdot \frac{u}{(1+Y_{b,s})^{u}} \tag{5}$$

$$CF_{b,s} = \frac{CF_b}{s} \tag{6}$$

$$u = \frac{t}{W} \cdot s \tag{7}$$

$$U = \{u\}, \{u\} + 1, \ldots, u \quad U > 0 \tag{8}$$

$$Y_{b,s} = (1 + Y_b)^{1/s} - 1 \tag{9}$$

где $\mu_{b,t,s}$ – дюрация облигации b со сроком до погашения t при разделяющем год на s равных частей числе выплат;

$CF_{b,s}$ – купонный платеж по облигации b при разделяющем год на s равных частей числе выплат;

u – общее число (периодов) платежей по облигации b;

U – срок до очередного платежа по облигации b;

$\{u\}$ – дробная часть общего числа (периодов) платежей по облигации b;

$Y_{b,s}$ – ставка доходности к погашению по облигации b при разделяющем год на s равных частей числе выплат.

Обсудим записи (5), (6), (7), (8), (9), как и ранее, в контексте матрицы (3). Во-первых, они представляют собой универсальный инструментарий измерения дюрации. Отсюда очевидна необязательность вычисления дюрации облигации только в годах (напомним, что именно год являлся из-за отсутствия иных вариантов расчета безальтернативным, следовательно, частным случаем определения дюрации). Теперь это можно делать на основе любых единиц измерения времени, которые разделят год на части по числу платежей. Говоря конкретнее, если по облигации предусматривается: а) одна выплата в год ($s=1$), то дюрация будет измеряться числом лет; б) две выплаты в год ($s=2$), то дюрация будет измеряться числом полугодий; в) четыре выплаты в год ($s=4$), то дюрация будет измеряться числом кварталов; г) двенадцать раз в год ($s=12$), то дюрация будет измеряться числом месяцев; д) триста шестьдесят пять раз в год ($s=365$), то дюрация будет измеряться числом дней (однако обозначенный случай вряд ли является реалистичным, хотя и без затруднений, что принципиально, поддающимся математической формализации). Во-вторых, если исследуется бескупонная облигация, то первое слагаемое формулы (5), состоящее из двух сомножителей, вырождается в ноль (из-за нулевой величины числителя первого сомножителя), соответственно, дюрация ($\mu_{b,t,s}$) неизбежно окажется равна (скорее всего, принимающему дробное значение) общему числу (периодов) платежей (u). Если же срок до погашения, напомним, выраженный посредством общего числа (периодов) платежей, составляет не более одного ($0<u\leq1$) периода времени, то дюрация ($\mu_{b,t,s}$) и в случае с классической облигацией окажется равна общему числу (периодов) платежей (u). Однако здесь все-таки имеется разница, в частности, формула (5) используется в целостном виде (как сумма двух слагаемых, причем каждое из которых объединяет по два сомножителя). В-третьих, если общее число (периодов) платежей (u) является целым, иначе говоря, когда дробная часть общего числа (периодов) платежей ($\{u\}=0$) отсутствует, то отсчет срока до очередного платежа (U) должен начинаться не с нуля, а с единицы. В принципе на это указывает строгое неравенство, содержащееся во второй строке записи (8), тем не менее, в данной ситуации (во избежание ошибок применения инструментария) следует полагать, что параметр $\{u\}$ вообще не обладает числовым значением, а просто отсутствует.

Наконец, от характеристики статистической природы дюрации в качестве меры средневзвешенного срока выплат по облигации перейдем к характеристике экономической природы дюрации в качестве меры ценовой неустойчивости облигации как ее уникального свойства. В частности, дюрация, дисконтированная на единичный период времени по ставке доходности к погашению, показывает (важно подчеркнуть, что приблизительно), на сколько процентов (хотя следует признать, что при математической формализации именно такое видение, пожалуй, не складывается) должен измениться рыночный курс облигации при отклонении ставки доходности к погашению в один (выраженный в долях единицы, разумеется, с целью применения в расчетах) процентный пункт (который нельзя путать с одним процентом), т.е. в интервале $(Y_{b,s}\pm0{,}005)\cdot100$. Здесь подразумевается величина разброса (можно сказать, ширина интервала) между ставками доходности к погашению по облигации в один процентный пункт (напомним, выраженный в долях единицы), т.е. в пределах, включая пороговые значения, от $Y_{b,s}–0{,}005$ до $Y_{b,s}+0{,}005$. Отсюда ценовую неустойчивость облигации допустимо записать в формате приблизительного равенства (10), в котором, что непосредственно касается количественного определения ценовой неустойчивости облигации, левая сторона дает примерную оценку, а правая – точную:

$$\frac{\mu_{b,t,s}}{1 + Y_{b,s}} \approx \frac{\Delta P_b}{P_b} \cdot 100 \tag{10}$$

$$\Delta P_b = P_b^{**} - P_b^{*} \tag{11}$$

$$P_b^{*}=\frac{CF_{b,s}}{Y_{b,s}+0{,}005}\cdot\left(1-\frac{1}{(1{,}005+Y_{b,s})^{u}}\right)+\frac{P_{b,nom}}{(1{,}005+Y_{b,s})^{u}} \quad (12)$$

$$P_b^{**}=\frac{CF_{b,s}}{Y_{b,s}-0{,}005}\cdot\left(1-\frac{1}{(0{,}995+Y_{b,s})^{u}}\right)+\frac{P_{b,nom}}{(0{,}995+Y_{b,s})^{u}} \quad (13)$$

где ΔP_b – изменение рыночного курса облигации b при отклонении ставки доходности к погашению в один процентный пункт;

$\Delta P_b/P_b \cdot 100$ – ценовая неустойчивость облигации b;

P_b^{*} – рыночный курс облигации b при повышении ставки доходности к погашению;

P_b^{**} – рыночный курс облигации b при снижении ставки доходности к погашению.

Обсудим записи (10), (11), (12), (13). Во-первых, чем больше дюрация облигации, а здесь вполне уместно сказать по-другому, в частности, чем больше срок до погашения облигации, тем больше ее ценовая неустойчивость. Во-вторых, чем меньше ставка доходности к погашению облигации, тем аналогичным же образом больше ее ценовая неустойчивость. Какие здесь возникают мысли? Прежде всего, у облигаций с одинаковой (подчеркнем, дисконтированной) дюрацией, будет одинаковая ценовая неустойчивость на фоне других количественных характеристик, которые могут быть одинаковыми или различаться, включая как дюрацию, так и годовую ставку доходности к погашению. Выходит, что отдельно количественные параметры разных облигаций не являются пригодными для их сравнения из-за отсутствия единой основы, но являются релевантными по совокупности, когда объединены в ценовую неустойчивость на основе дюрации и годовой ставки доходности к погашению. Это способно упростить понимание взаимной связи доходности и риска облигаций. Например, приобретая облигации, следует знать, что относительно низкодоходные и более долговременные вложения капитала в облигации при их продаже до истечения срока погашения связаны с большей ценовой неустойчивостью по сравнению с относительно высокодоходными и более краткосрочными вложениями капитала в облигации. Очевидно, что здесь меняется общепринятое (относящееся исключительно к размещаемым на бессрочной основе акциям и математически доказанное на них же с учетом принятого по умолчанию допущения о бессрочности) представление о взаимной связи доходности и риска финансовых инвестиций. Таким образом, облигации специфичны из-за наличия и неравенства сроков до погашения.

Теперь перейдем к объяснению аспектов возникающей неточности применения дюрации при выявлении ценовой неустойчивости облигации, поскольку ее рыночный курс и ставка доходности к погашению имеют обратную зависимость (когда рыночный курс растет/падает, тогда ставка доходности к погашению уменьшается/увеличивается). Однако особенности обозначенной зависимости пока не исследовались, к чему и перейдем.

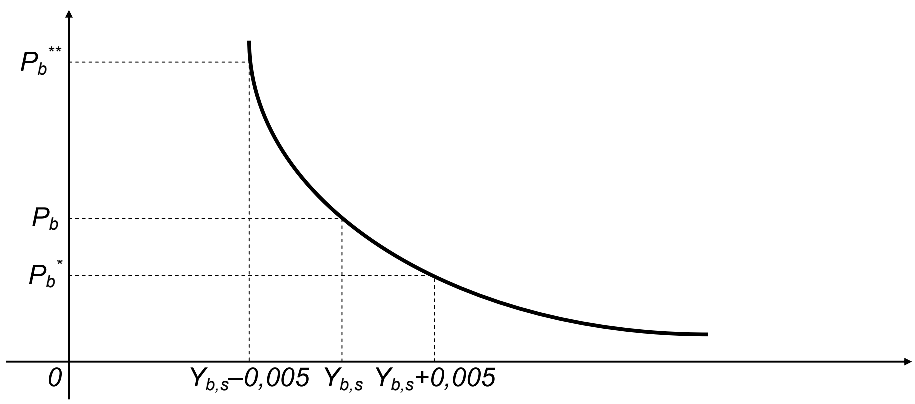

Рисунок 1. Выпуклость облигации в виде взаимного изменения ставки доходности к погашению (*по оси абсцисс*) и рыночного курса (*по оси ординат*) без искажающего влияния дюрации

Итак, взаимное изменение рыночного курса облигации и доходности к погашению облигации является хоть и обратным, но при этом нелинейным, математическая причина чего кроется в нелинейном характере формул (1), (4). Обозначенное взаимное изменение образует так называемую выпуклость. Именно она отражена на рис. 1 и свойственна всем облигациям, причем без исключений. Обратим внимание на то, что более крутой участок выпуклости облигации (он расположен на кривой слева от точки $Y_{b,s}$) наблюдается на относительно низких ставках доходности к погашению, наоборот, более пологий участок выпуклости облигации (он расположен на кривой справа от точки $Y_{b,s}$) наблюдается на относительно высоких ставках доходности к погашению. Это с одной стороны, а с другой – можно заметить соответствия: 1) относительно высоких рыночных курсов облигации более крутому участку выпуклости (оно наблюдается выше точки P_b); 2) относительно низких рыночных курсов облигации более пологому участку выпуклости (оно наблюдается ниже точки P_b). Таким образом, рыночный курс облигации подвержен более сильным изменениям на участках с низкими ставками доходности к погашению, разумеется, относительно участков с высокими ставками доходности к погашению, где рыночный курс облигации подвержен менее сильным изменениям. Если конкретнее, то при снижении ставки доходности к погашению ($Y_{b,s}$-$0,005$) неизбежно происходит большее увеличение рыночного курса облигации (P_b^{**}–P_b), чем при увеличении ставки доходности к погашению ($Y_{b,s}$+$0,005$), когда неизбежно происходит снижение рыночного курса облигации (P_b–P_b^*). Рисунок 1 визуально (причем довольно четко) подтверждает неравенство P_b^{**}–P_b>P_b–P_b^*, учитывая симметричное отклонение ставки доходности к погашению ($Y_{b,s}$±$0,005$).

Разумеется, у разных облигаций выпуклости могут отличаться. Напомним, что на форму выпуклости облигации влияют все ее количественные характеристики, объединенные в дюрацию. Можно сказать, что выпуклость облигации тем круче, чем больше ее дюрация. Отсюда уместно перейти к обсуждению связи дюрации и выпуклости.

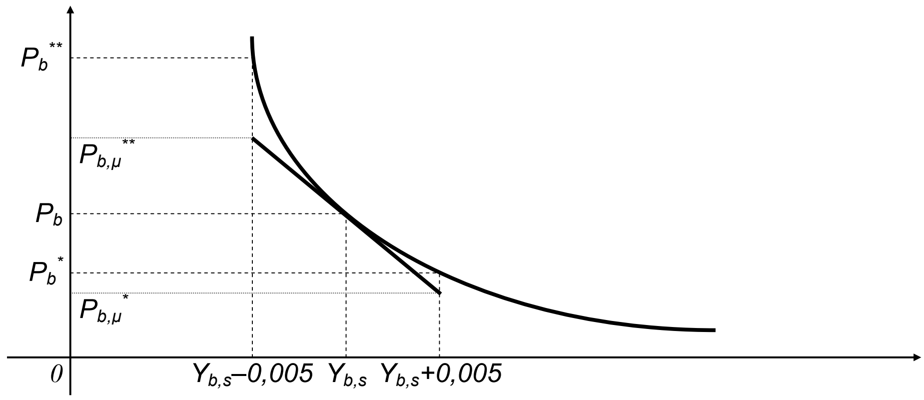

Рисунок 2. Выпуклость облигации в виде взаимного изменения ставки доходности к погашению (*по оси абсцисс*) и рыночного курса (*по оси ординат*) с искажающим влиянием дюрации.

Обратим внимание на отличительную особенность рисунок 2, где нисходящая прямая линия отражает наблюдающееся под влиянием дюрации облигации взаимное изменение ставки доходности к погашению и рыночного курса. Ранее упоминалось, что дюрация, дисконтированная на единичный период времени по ставке доходности к погашению, есть приблизительная мера ценовой неустойчивости облигации, в отношении чего теперь можно отметить следующее. Во-первых, дюрация, дисконтированная на единичный период времени по ставке доходности к погашению, не просто искажает, а всегда занижает рыночный курс облигации ($P_{b,\mu}^{**}$<P_b^{**}; $P_{b,\mu}^*$<P_b^*) при симметричном отклонении ставки доходности к погашению ($Y_{b,s}$±$0,005$). Во-вторых, искажение (занижение) рыночного курса облигации тем больше, чем: а) меньше ставка доходности к погашению; б) больше отклонение ставки доходности к погашению. Однако при относительно малых отклонениях ставки доходности к погашению дюрация может оказаться приемлемым инструментом для принятия решений о купле-продаже облигации, поскольку искажающее влияние дюрации облигации, скорее всего, будет едва заметным, даже несмотря на то, что рисунок 2 создает другое визуальное впечатление. В данном случае имеет место эффект увеличенного масштаба изображения. Тем не менее, уместно еще раз повторить, что при малых (и обязательно симметричных) отклонениях ставки доходности к погашению искажающее действие дюрации, скорее всего, будет едва заметным.

Подводя окончательные итоги проведенному исследованию, отметим, что измерение ценовой неустойчивости облигаций на основе их дюрации, дисконтированной на единичный период времени по ставке доходности к погашению, является потенциально полезным инструментом анализа вложений капитала в облигации. При этом обратим внимание на привлекательную сторону разработанного инструментария. Облигации разных эмитентов могут обладать разными количественными параметрами: 1) рыночным курсом; 2) номинальной стоимостью; 3) годовой ставкой доходности к погашению; 4) сроком до погашения; 5) наличием или отсутствием купонного платежа; 6) периодичностью выплат купонного дохода в течение года. Однако при численном совпадении дюрации, дисконтированной на единичный период времени по ставке доходности к погашению, несмотря на все различия, такие облигации будут обладать одинаковой ценовой неустойчивостью, иначе говоря, будут идентичными в пределах схемы «ценовая неустойчивость – доходность к погашению», т.е. будут демонстрировать одинаковую реакцию на изменения рыночного курса. Причем предложенный инструментарий отражает довольно необычное для финансовых инвестиций математическое свойство облигаций, когда меньшая дюрация свидетельствует об их большей надежности, что относится к облигациям, обладающим более коротким сроком до погашения и более высокой годовой ставкой доходности к погашению.

Литература

1. Bierwag G., Kaufman G., Toevs A. Duration: Its Development and Use in Bond Portfolio Management//Financial Analysts Journal. 1980. №4. P. 15-35.
2. Brooks R., Livingston M. A Closed-Form Equation for Bond Convexity//Financial Analysts Journal. 1989. №6. P. 78-79.
3. Chua J.H. A Generalized Formula for Calculation Bond Duration//Financial Analysts Journal. 1988. №5. P. 65-67.
4. Dunetz M.L., Mahoney J.M. Using Duration and Convexity in the Analysis of Callable Bonds//Financial Analysts Journal. 1988. №3. P. 53-72.
5. Hopewell M.H., Kaufman G.G. Bond Price Volatility and Term to Maturity: A Generalized Respecification//American Economic Review. 1973. №4. P. 4749-4753.
6. Ilmanen A. How Well Does Duration Measure Interest Rate Risk?//Journal of Fixed Income. 1992. №4. P. 43-51.
7. Kahn R, Lochoff R. Convexity and Exceptional Return//Journal of Portfolio Management. 1990. №2. P. 43-47.
8. Nawalkha S.K., Lacey N.J. Closed-Form Solutions of Higher-Order Duration Measures//Financial Analysts Journal. 1988. №6. P. 82-84.
9. Reilly F.K., Sidhu R.S. The Many Uses of Bond Duration//Financial Analysts Journal. 1980. №4. P. 58-72.
10. Weil R.L. Macauley’s Duration: An Apperication//Journal of Business. 1973. №4. P. 589-592.

УДК 519.213, 519.214, 519.866

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ CI-ОБРАЗОВ СИММЕТРИЧНЫХ КОПУЛ

Савинов Евгений Анатольевич (easavinov@fa.ru)
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации

Изучается так называемое CI-преобразование копул, основанное на схеме перекрестной независимости случайных векторов. Показано, что проекции фиксированной размерности CI-образов симметричных копул асимптотически независимы, если устремить к бесконечности размерность прообраза. Приведен алгоритм численного моделирования и результаты расчетов мер зависимости для CI-образа многомерной копулы Клэйтона.

Указанное преобразование может быть использовано не только для моделирования новых типов зависимостей при рассмотрении реальных финансовых данных, но и для настройки силы связи при подборе многомерной модели.

Ключевые слова: копула, перекрестная независимость, CI-образ, моделирование зависимостей

Введение

Достаточно давно известно, что многомерное нормальное распределение не является хорошей моделью для описания совместного распределения многих экономических и финансовых переменных. Проблеме поиска более адекватных многомерных моделей посвящено множество статей. Разработано множество методов построения многомерных распределений, использующих маргинальные и смешанные моменты (с условием определенности многомерной проблемы моментов), интегральные преобразования Фурье, Лапласа, совместную воспроизводящую функцию моментов, совместную функцию среднего остатка жизни (см. [1]). Для определения двумерных распределений используются условное и маргинальное распределения, а в [2] рассматривается подход на основе знания только семейств условных распределений (при определенных условиях совместности).

Новый метод построения многомерных распределений и изучения их свойств подарила активно развивающаяся в настоящее время теория копул (см., например, [3]), являющаяся относительно новым направлением в теории распределений.

На сегодняшний день наиболее хорошо изучены двумерные копулы. Известно