

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ

DOI: 10.6060/ivecofin.2021493.559

УДК: 004.94

ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

С.П. Бобков

Сергей Петрович Бобков (ORCID 0000-0001-7315-1625)

Ивановский государственный химико-технологический университет, пр. Шереметевский, 7, Иваново, 153000, Россия

E-mail: bsp@isuct.ru

Рассмотрены возможности использования аналитического и имитационного подходов к моделированию системы массового обслуживания. Для реализации аналитического метода использована модель, базирующаяся на теории цепей Маркова с непрерывным временем. Имитационное моделирование осуществлялось с применением инструментального программного комплекса Matlab-Simulink. Проведено сравнение результатов и оценены возможности модельных подходов для совершенствования функционирования реальных систем массового обслуживания.

Ключевые слова: системы массового обслуживания, аналитическое моделирование, имитационное моделирование.

APPROACHES TO SIMULATION OF QUEUING SYSTEMS

S.P. Bobkov

Sergey P. Bobkov (ORCID 0000-0001-7315-1625)

Ivanovo State University of Chemistry and Technology, Sheremetevsky Ave, 7, 153000, Ivanovo, Russia

E-mail: bsp@isuct.ru

The possibilities of using analytical and simulation approaches to modeling a queuing system are considered. To implement the analytical method, a model based on the theory of Markov chains with continuous time is used. The simulation was carried out using the Matlab-Simulink software package. The results are compared and the possibilities of model approaches for improving the functioning of real queuing systems are estimated.

Keywords: queuing systems, analytical modeling, simulation.

Для цитирования:

Бобков С.П. Подходы к моделированию систем массового обслуживания. *Известия высших учебных заведений. Серия «Экономика, финансы и управление производством» [Ивэкофин]*. 2021. № 03(49). С.130-134. DOI: 10.6060/ivecofin.2021493.559

For citation:

Bobkov S.P. Approaches to simulation of queuing systems. *Ivecofin*. 2021. № 03(49). С.130-134. DOI: 10.6060/ivecofin.2021493.559 (in Russian)

ВВЕДЕНИЕ

Во многих областях человеческой деятельности приходится сталкиваться с системами, предназначенными для многократного использования при решении однотипных задач. Такие системы принято называть системами массового обслужи-

вания (далее - СМО). Их можно встретить на производстве, на транспорте, в финансовой сфере, в сфере массовых коммуникаций и пр. [1]. Во всех случаях эти системы производят обслуживание (обработку) поступающих в нее заявок (требований). Обслуживание заявок производится каналами, в качестве которых могут выступать либо тех-

нические устройства, либо сотрудники соответствующей организации. Помимо каналов в структуру СМО могут входить накопители заявок, которые образуют очередь ожидания. Как правило, число мест в очереди ограничено [2].

Независимо от структуры СМО все они обладают следующими общими особенностями. Продолжительность промежутков времени между моментами поступления новых заявок в общем случае являются случайными, следовательно, входной поток заявок носит случайный характер. С другой стороны, продолжительность процесса обслуживания отдельной заявки также является случайной, поскольку заявки могут существенно различаться по сложности. Одновременное воздействие этих двух случайных процессов может привести к тому, что в какие-то моменты времени система окажется частично или полностью не загруженной. Также вероятна ситуация, когда наоборот, будут заняты все каналы и места в очереди, и система не сможет принять новые заявки. Обе описанные ситуации крайне нежелательны, поскольку чреваты экономическими потерями. В первом случае это будут потери из-за простоя каналов, во втором – это будет упущенная прибыль [3].

В этой связи, весьма важной становится задача анализа функционирования СМО для определения оптимальной структуры системы и ее рабочих параметров. При решении таких задач наиболее целесообразно использовать процедуры моделирования СМО.

Долгое время среди подходов к моделированию СМО наиболее представительным считался метод, использующий теорию цепей Маркова с непрерывным временем [4]. Этот метод позволяет вычислять показатели эффективности СМО, такие как пропускная способность системы, вероятность потери заявки, средняя занятость каналов и очередей, продолжительность нахождения заявки в системе и пр. Указанные показатели определяются на основе предварительно найденных вероятностей возможных состояний системы заданной структуры.

В последние годы получил распространение альтернативный подход к моделированию СМО, использующий имитационную методологию моделирования, где математические объекты заменяются имитационными алгоритмами [5]. Это позволяет использовать компьютерную технику в качестве исследовательского инструмента.

Далее приводятся результаты сравнения этих двух подходов при моделировании конкретной СМО.

ОПИСАНИЕ ОБЪЕКТА МОДЕЛИРОВАНИЯ

В качестве примера рассмотрим работу небольшого сервисного центра, занимающегося обслуживанием технических средств. В его функции входит мелкий ремонт, устранение дефектов, замена комплектующих, оказание консультаций. В течение рабочего дня в подразделении работают два сотрудника. Один из них занят только обслуживанием устройств, а второй – часть времени тратит на общение с клиентами (прием, оформление и выдача заказов).

Рассмотрим систему в несколько упрощенном виде, т.е. будем считать, что осуществляется только ремонт и обслуживание технических устройств. При такой постановке задачи финансовые и учетные операции будем считать второстепенными, и их влияние на работу системы происходит только путем уменьшения производительности второго сотрудника, вынужденного выполнять эти действия.

Таким образом, данный сервисный центр можно рассматривать, как систему массового обслуживания, в которую поступают заявки (клиенты) и которая имеет два канала обслуживания с разной производительностью. Ожидающие обслуживания клиенты образуют очередь ожидания.

Был проведен предварительный анализ работы данного объекта, который позволил провести статистическую оценку параметров его работы. Обработка опытных данных показала, что средняя продолжительность обслуживания одной заявки сотрудником составляет 0,25 час, средняя интенсивность поступления заявок равнялась 7 заявок/час. Также было установлено, что у сотрудника, общающегося с клиентами, этот процесс занимает, в среднем, 40% рабочего времени. Кроме того, оказалось, что количество клиентов в очереди практически никогда не превышало трех человек.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ

Будем считать, что исследуемая СМО имеет два канала обслуживания и очередь из трех мест. На вход системы поступает поток требований с экспоненциальным законом распределения величины промежутка времени между заявками и средней интенсивностью λ . Заявки обслуживаются двумя каналами, при этом производительность первого канала равна μ_1 , а второго μ_2 . Средняя продолжительность обслуживания заявки также может описываться экспоненциальным законом распределения. Если каналы обслуживания заняты, заявки становятся в очередь. Дисциплина выбора заявок из очереди – естественная. Если пришедшая заявка застала

занятыми оба канала и все три места в очереди, она покидает систему не обслуженной.

Рассматриваемая система может иметь семь пять возможных состояний, и, соответственно, семь значений вероятностей состояний. Рассмотрим их:

- S_0 – вероятность состояния, когда в системе нет ни одной заявки, все каналы свободны;
- S_1 – вероятность состояния, когда в системе одна заявка, занят более производительный канал;
- S_2 – вероятность состояния, когда в системе одна заявка, занят менее производительный канал;

- S_3 – вероятность состояния, когда в системе две заявки, заняты оба канала, очередь пуста;
- S_4 – вероятность состояния, когда в системе три заявки, заняты оба канала и одно место в очереди;
- S_5 – - вероятность состояния, когда в системе четыре заявки, заняты оба канала и два места в очереди;
- S_6 – - вероятность состояния, когда в системе пять заявок, заняты оба канала и все три места в очереди.

Графическое представление данной СМО представлено на рис. 1.

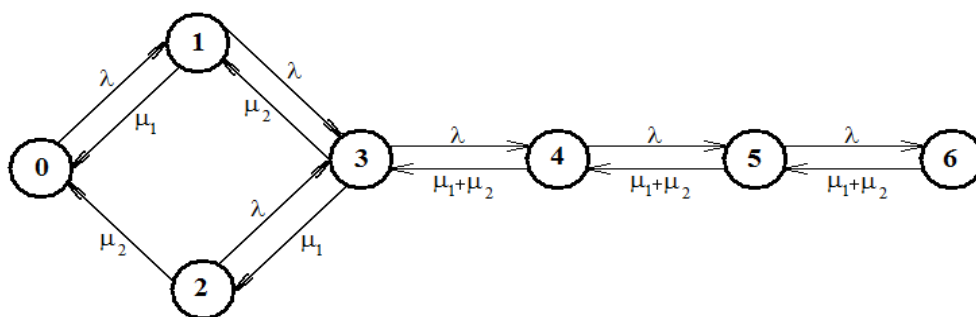


Рисунок 1. Граф состояний СМО с двумя неодинаковыми каналами и тремя местами в очереди
Figure 1. QS state graph with two unequal channels and three places in the queue

Система линейных алгебраических уравнений для стационарного режима работы рассматриваемой СМО будет иметь вид:

$$\begin{cases} -\lambda S_0 + \mu_1 S_1 + \mu_2 S_2 = 0 \\ \lambda S_0 - (\lambda + \mu_1) S_1 + \mu_2 S_3 = 0 \\ -(\lambda + \mu_2) S_2 + \mu_1 S_3 = 0 \\ \lambda S_1 + \lambda S_2 - (\lambda + \mu_1 + \mu_2) S_3 + (\mu_1 + \mu_2) S_4 = 0 \\ \lambda S_3 - (\lambda + \mu_1 + \mu_2) S_4 + (\mu_1 + \mu_2) S_5 = 0 \\ \lambda S_4 - (\lambda + \mu_1 + \mu_2) S_5 + (\mu_1 + \mu_2) S_6 = 0 \\ S_0 + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Решение системы уравнений (1) при заданных значениях λ , μ_1 и μ_2 позволит определить значения вероятностей состояний СМО в установившемся режиме. Это, в дальнейшем даст возможность вычислить необходимые показатели эффективности СМО.

Описанный аналитический подход базируется на теории цепей Маркова с непрерывным временем и может успешно применяться для анализа функционирования СМО. Он позволяет получать необходимые характеристики системы при условии корректного использования математического аппарата. Вместе с тем аналитический подход обладает некоторыми недостатками, к которым можно отнести введение ряда упрощающих допущений относительно случайных па-

раметров входящего потока заявок и продолжительности их обслуживания. Кроме того, при изменении структуры СМО расчетные зависимости аналитического метода требуют корректировки.

ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ

Поскольку изучаемая СМО является динамической событийно-управляемой системой, то для имитационного моделирования был использован программный комплекс Matlab-Simulink [6].

Схема модели приведена на рис. 2. В целях упрощения рисунка вспомогательные блоки модели, предназначенные для визуализации и вывода результатов, не показаны.

Модель работает следующим образом.

Блок *Генератор случайных чисел 1* вырабатывает случайные интервалы времени между заявками, имеющие заданное распределение. Интервалы поступают в *Генератор заявок*, где формируется входной поток заявок. Затем поток заявок направляется в *Коммутатор1*, который передает основной поток заявок в *Очередь ожидания*, имеющую три места. Основная функция данного коммутатора в том, что если система будет переполнена (все места в очереди заняты), то коммутатор через второй выходной порт направляет очередную заявку в *Приемник заявок 1*, где фиксируются потерянные (необслуженные) заявки. Из очереди, подлежащие обработке

заявки, проходят *Коммутатор 2*, распределяющий их по *Каналам обслуживания*. Продолжительность обслуживания определяется *Генераторами случайных чисел 2 и 3*. После обслужи-

вания заявки объединяются *Агрегатором* и уходят в *Приемник заявок 2*, фиксирующий заявки, обслуженные системой.

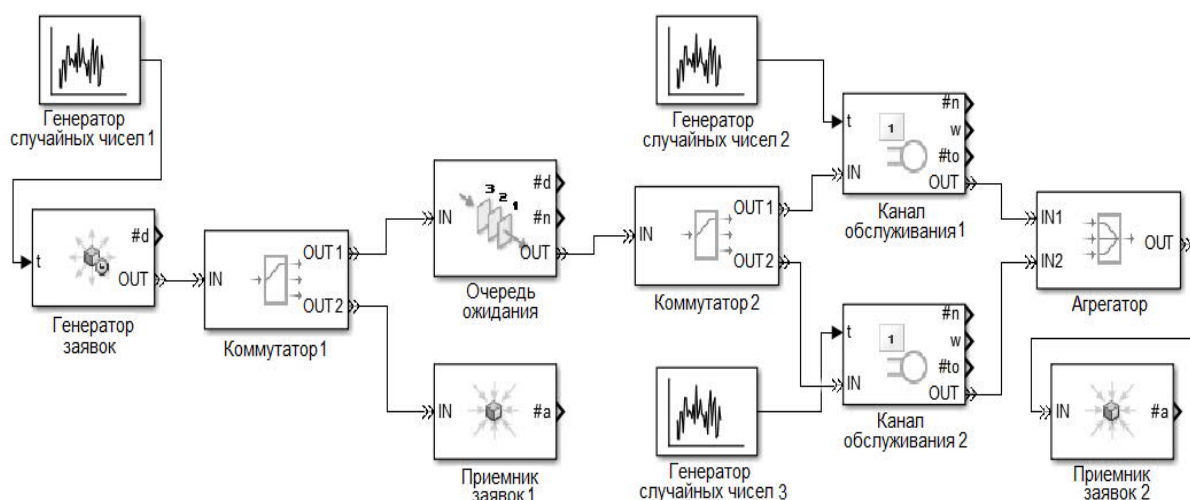


Рисунок 2. Схема имитационной модели СМО
Figure 2. Schematic diagram of the QS simulation model

Описанная модель использовалась для проведения вычислительных экспериментов, каждый из которых имитировал работу исследуемой СМО в течение 10 часов. Число реализаций (прогонов) модели для каждого конкретного набора исходных данных составляло до 5 раз. Затем данные обрабатывались, что давало возможность представить результаты моделирования в виде наиболее вероятных значений исследуемых величин.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ВЫВОДЫ

В качестве исходных данных для моделирования использовались следующие результа-

ты наблюдений за поведением реального объекта: интенсивность входного потока заявок – 7 заявок/час; интенсивность обслуживания первым каналом – 4 заявки/час; интенсивность обслуживания вторым каналом – 2,4 заявки/час. К сожалению, удалось получить только два реальных параметра работы объекта, обладающих достаточной достоверностью. Это среднее количество обслуженных заявок в единицу времени (пропускная способность) и интенсивность потока потерянных заявок. Результаты моделирования представлены в табл. 1.

Таблица 1. Результаты моделирования системы массового обслуживания
Table 1. Results of modeling the queuing system

	Показатель	Реальный объект	Аналитическая модель	Имитационная модель
1	Пропускная способность, заявок/час	5,2	5,46	5,3
2	Потерянные заявки, заявок/час	1,8	1,54	1,63
3	Среднее количество заявок в очереди ожидания, шт.	-	1,25	1,3
4	Среднее время пребывания заявки в системе, часов	-	0,46	0,49

Анализ данных табл. 1 показывает, что обе использованные модели показывают результаты, вполне сопоставимые с данными реального объекта. Это подтверждает корректность модельных подходов, причем имитационная модель дает результаты, более близкие к реальным.

Кроме того, модельный подход позволяет прогнозировать поведение объекта при изменении параметров его структуры с целью оптимизации.

Так из показателей эффективности видно, что количество потерянных заявок и время пребывания заявок в системе достаточно велико. В

качестве одной из мер улучшения ситуации можно предложить добавить еще одного сотрудника, который бы занимался только работой с клиентами. Это может позволить более эффективно использовать опыт и знания специалиста

по ремонту, не отвлекая его от профессиональной деятельности. Результаты моделирования в условиях, когда оба сотрудника работают с максимальной интенсивностью, приведены в табл. 2.

Таблица 2. Сравнение двух вариантов организации работы системы
Table 2. Comparison of two options for organizing the work of the system

	Показатель	Имитационная модель	
		Вариант 1	Вариант 2
1	Пропускная способность, заявок/час	5,3	6,1
2	Потерянные заявки, заявок/час	1,4	0,82
3	Среднее количество заявок в очереди ожидания, шт.	1,3	0,86
4	Среднее время пребывания заявки в системе, часов	0,49	0,29

Результаты показывают, что предложенное мероприятие позволяет повысить пропускную способность на 15% и снизить количество клиентов, которые могут уйти к конкурентам на 41%. Эти показатели прогнозируют дополнительную экономическую выгоду. Кроме того, на 34% уменьшится длина очереди и значительно сократится время ожидания выполнения заказа, что увеличит привлекательность объекта. Безусловно, добавление сотрудника приведет к увеличению расходов. Поэтому конкретные решения в данной ситуации должно принимать лица, владеющие необходимой финансово-экономической информацией.

В целом можно отметить, что оба примененных подхода к моделированию СМО достаточно адекватно описывают функционирование реального объекта.

В то же время сравнение данных подходов позволяет сделать вывод, что имитационных метод дает более широкие возможности по следующим причинам. Он позволяет задать любой закон распределения случайных величин, в то время как аналитический способ требует применения только экспоненциального распределения. Кроме того, имитационный подход позволяет достаточно легко менять структуру системы – добавлять или удалять каналы, изменять количество мест в очереди и пр. Аналитическая модель в таких случаях требует нового составления системы линейных уравнений, которая должны соответствовать структуре СМО. Недостатком имитационного подхода можно считать необходимость использования специальных инструментальных программных средств.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Карташевский В.Г.** Основы теории массового обслуживания. М.: Горячая линия–Телеком. 2013. 130 с.
2. **Бочаров П.П., Печинкин А.В.** Теория массового обслуживания. М.: Изд-во РУДН. 1995. 529 с.
3. **Алиев Т.И.** Задачи и методы проектирования дискретных систем. СПб: Университет ИТМО. 2015. 127 с.
4. **Романцев В.В.** Аналитические модели систем массового обслуживания. СПб: СПбГЭТУ (ЛЭТИ). 1998. 67 с.
5. **Павловский Ю.Н., Белотелов В.Н., Бродский Ю.И.** Имитационное моделирование: учеб. пособие. М.: Академия. 2008. 236 с.
6. Моделирование СМО в Simulink MATLAB. https://pikabu.ru/story/modelirovanie_smo_v_simulink_matlab_3672328.

REFERENCES

1. **Kartashevsky V.G.** Foundations of the theory of queuing. M.: Gryachaya Liniya-Telecom. 2013. 130 p. (in Russian).
2. **Bocharov P.P., Pechinkin A.V.** Queuing theory. M.: Publishing house of RUDN. 1995. 529 p. (in Russian).
3. **Aliev T.I.** Problems and methods of designing discrete systems. SPb: ITMO University. 2015. 127 p. (in Russian).
4. **Romantsev V.V.** Analytical models of queuing systems. SPb: SPETU (LETI). 1998. 67p. (in Russian).
5. **Pavlovsky Yu.N., Belotelov V.N., Brodsky Yu.I.** Simulation modeling: textbook. M.: Academy. 2008. 236 p. (in Russian).
6. Modeling QS in Simulink MATLAB. https://pikabu.ru/story/modelirovanie_smo_v_simulink_matlab_3672328.

*Поступила в редакцию 07.07.2021
 Принята к опубликованию 20.07.2021*

*Received 07.07.2021
 Accepted 20.07.2021*